Вычисления с адельными матрицами перехода для пучка $\mathcal{G}$ и центральным расширением $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ можно проделать двумя разными способами. Сравнение полученных двух ответов приводит к теореме Римана–Роха для пучка $\mathcal{G}$ на поверхности X (без формулы Нётера).

Список литературы

[1] D.V. Osipov. Second Chern numbers of vector bundles and higher adeles. Bull. Korean Math. Soc. **54** (2017), no. 5, 1699–1718; arXiv: `math.AG/1706.07354`.

[2] D.V. Osipov. Central extensions and Riemann–Roch theorem on algebraic surfaces, arXiv: `math.AG/2105.14626` (2021).

Инварианты унипотентного радикала параболической подгруппы

А.Н. Панов[1]

Самарский университет, Самара, Россия

apanov@list.ru

Известно, что поле инвариантов для рационального действия произвольной унипотентной группы на аффинном многообразии рационально, то есть является чисто трансцендентным расширением основного поля [1]. Отметим, что здесь поле инвариантов является полем частных алгебры инвариантов. Ставится задача нахождения системы свободных образующих в поле инвариантов в явном виде.

Пусть K — поле характеристики нуль и P — параболическая подгруппа в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, K)$. Имеет место разложение $P = LU$ группы P в полупрямое произведение унипотентного радикала U и подгруппы Леви L. Подгруппа P определяется разбиением целочисленного отрезка $[1, n]$ на систему последовательных непересекающихся отрезков $[1, n] = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \ldots \sqcup I_\ell$. Линейное пространство $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}(n, K)$ является прямой суммой $\mathcal{M} = \bigoplus_{1\leqslant k,m\leqslant n} \mathcal{M}_{km}$, где $\mathcal{M}_{km}$ натянуто на матричные единицы $E_{ij},\ \ (i, j) \in I_k \times I_m$. Унипотентная подгруппа U состоит из матриц $E + A$, где E — единичная матрица и A лежит в сумме подпространств $\mathcal{M}_{km}$, $k < m$.

Рассмотрим присоединённое представление $\mathrm{Ad}_g x = gxg^{-1}$ группы U в пространстве $\mathrm{Mat}(n, K)$. Определено представление группы U в алгебре $\mathcal{A}$ регулярных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$ по формуле $\rho_g f(X) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} X)$.. Это представление продолжается до действия U в поле $\mathcal{F}$ рациональных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$. Наша цель состоит в построении системы свободных образующих в поле инвариантов $\mathcal{F}^U$. Случай $U = \mathrm{UT}(n, K)$ был рассмотрен в работе [2].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–01–00091а.

Для любого $i \in [1,n]$ обозначим $i' = n+1-i$. Соответственно, для любого подмножества $T \in [1,n]$ положим $T' = \{i' \colon i \in T\}$. Рассмотрим множество $\mathbb{S}$, состоящее из пар (i,j), для которых $i \in I_k,\ j \in I'_m,\ k \geqslant m$.

Пусть $\{x_{ij}\}$ — набор стандартных координатных функций на $\mathcal{M}$. Образуем матрицу $\mathbb{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^n$. Рассмотрим присоединённую матрицу $\mathbb{X}^* = (x^*_{ij})_{i,j=1}^n$. Имеем $\mathbb{X}\mathbb{X}^* = \mathbb{X}^*\mathbb{X} = \det(\mathbb{X})E$.

Разобьём $\mathbb{S}$ на два подмножества $\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 \sqcup \mathbb{S}_1$, где $\mathbb{S}_0$ состоит из тех $(i,j) \in \mathbb{S}$, которые лежат на или выше антидиагонали. Соответственно, $\mathbb{S}_1$ — из тех $(i,j) \in \mathbb{S}$, которые лежат ниже антидиагонали.

Для любого $(i,j) \in \mathbb{S}_0$ определим многочлен $\mathcal{J}_{ij}$ как минор матрицы $\mathbb{X}$, определяемый системой столбцов $[1,j]$ и строк $\{i\} \cup [j'+1,n]$.

Пусть $(i,j) \in \mathbb{S}_1$. Образуем $(j \times j)$-матрицу

$$\mathbb{Y}_{ij} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{X}_{i',j} \\ -\,-\,-\,-\,- \\ \mathcal{X}^*_{j-i',j} \end{array} \right),$$

где $\mathcal{X}_{i',j}$ — это блок из матрицы $\mathbb{X}$ со столбцами $[1,j]$ и последними i' строками, соответственно, $\mathcal{X}^*_{j-i',j}$ — это блок из матрицы $\mathbb{X}^*$ со столбцами $[1,j]$ и последними $j-i'$ строками. Для любого $(i,j) \in \mathbb{S}_1$ определим $\mathcal{J}_{ij} = \det \mathbb{Y}_{ij}$.

Теорема. Система многочленов $\{\mathcal{J}_{ij} \colon (i,j) \in \mathbb{S}\}$ свободно порождает поле инвариантов $\mathcal{F}^U$.

Эта теорема переносится на случай, когда G — ортогональная или симплектическая группа. В докладе будет построена система свободных образующих для поля инвариантов относительно действия унипотентного радикала произвольной параболической подгруппы на группе G сопряжением.

Список литературы

[1] K. Miyata. Invariants of certain groups. 1. Nagoya Math. J. **41** (1971), 69–73.

[2] К.А. Вяткина, А.Н. Панов. Поля U-инвариантов присоединённого представления группы $\mathrm{GL}(n,K)$. Мат. заметки **93** (2013), no. 1, 144–147.