где $a_{jk}$ — постоянные коэффициенты, а функции $u^j$ зависят от переменных $x$ и $y$.

Исследование систем вида (1) в работе [1] было основано на изучении и применении т.н. характеристических алгебр Ли. Шабатом и Ямиловым была высказаны две гипотезы о системах экспоненциального типа. Первая гипотеза состояла в том, что система (1) интегрируема по Дарбу (то есть допускает полные наборы независимых характеристических интегралов по обеим переменным) тогда и только тогда, когда она является прямой суммой нескольких систем экспоненциального типа, у которых матрицы $M$ являются матрицами Картана простых алгебр Ли. Вторая гипотеза утверждала, что системы вида (1), не интегрируемые по Дарбу, но допускающие т.н. высшие симметрии, соответствуют вырожденным матрицам Картана (матрицам Картана аффинных алгебр Каца–Муди). Несмотря на то, что текст [1] так и остался в статусе препринта, данная работа послужила отправной точкой для большого количества исследований и публикаций на тему интегрирования систем экспоненциального типа.

Мы будем обсуждать методы нахождения явных формул для высших симметрий (инвариантов действия локальной группы Ли–Бэклунда) гиперболических систем экспоненциального типа, соответствующих вырожденным матрицам Картана. Доклад основан на результатах работ [2], [3].

**Список литературы**

[1] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт, Уфа, БФАН СССР, 1981.

[2] Д.В. Миллионщиков. Характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки. УМН **72** (2017), no. 6, 203–204.

[3] Д.В. Миллионщиков, С.В. Смирнов. Характеристические алгебры и интегрируемые системы экспоненциального типа. Уфимский математический журнал, **13** (2021), no.2, 44–73.

## Центральные расширения и теорема Римана–Роха

**Д.В. Осипов**

**Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия**

d_osipov@mi-ras.ru

Пусть $S$ — гладкая проективная кривая над полем $k$. Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_S$-модулей ранга $n$ на $S$ (это есть пучок сечений векторного расслоения ранга $n$ на $S$).

В этом случае хорошо известно локальное (адельное) представление для разности эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{F}) - n\chi(\mathcal{O}_S)$. Это представление получается при помощи выбора матриц перехода между тривиализациями локально свободного пучка $\mathcal{F}$ в общей точке кривой $S$ и в пополнениях локальных колец замкнутых точек кривой $S$. При этом степень пучка $\mathcal{F}$ возникает из естественного гомоморфизма

$$GL_n(\mathbb{A}_S) \longrightarrow \mathbb{Z}\,,$$

где $\mathbb{A}_S = \prod'_{p \in S} K_p$ — кольцо аделей на кривой $S$, $K_p$ — пополнение поля функций $k(S)$ на кривой $S$ по дискретному нормированию, задаваемому замкнутой точкой $p \in S$. Более точно, степень пучка $\mathcal{F}$, которая совпадает с выписанной выше разностью эйлеровых характеристик, получается применением этого гомоморфизма к элементу из группы $GL_n(\mathbb{A}_S)$, задаваемому матрицами перехода для пучка $\mathcal{F}$.

Пусть теперь $X$ — гладкая проективная поверхность над полем $k$. В этом случае имеется кольцо аделей Паршина–Бейлинсона $\mathbb{A}_X = \prod'_{x \in C} K_{x,C}$, где «двумерное» адельное произведение берется по всем парам $x \in C$: неприводимая кривая $C$ на $X$ и точка $x$ на $C$. Кольцо $K_{x,C}$ есть конечное прямое произведение двумерных локальных полей, каждое из которых изоморфно полю $k'((u))((t))$, где $k'$ — конечное расширение поля вычетов $k(x)$ точки $x$. Если точка $x$ гладкая на $C$, то $K_{x,C}$ будет двумерным локальным полем.

Вместо указанного выше гомоморфизма из группы $GL_n(\mathbb{A}_S)$ в группу $\mathbb{Z}$ теперь существует каноническое центральное расширение

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)} \longrightarrow GL_n(\mathbb{A}_X) \longrightarrow 1\,.$$

Пусть $\mathcal{G}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей ранга $n$ на $X$. Тогда выбор тривиализаций пучка $\mathcal{G}$ в пополнениях локальных колец схемных точек на $X$ задает матрицы перехода, которые будут из группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$.

В своем докладе я расскажу, как получить локальное (адельное) разложение для разности эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{G}) - n\chi(\mathcal{O}_S)$ при помощи матриц перехода из группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$ для пучка $\mathcal{G}$ и при помощи указанного выше центрального расширения. Это локальное (адельное) разложение было получено в препринте [2]. При этом использовались результаты из статьи [1], где было получено локальное (адельное) разложение для второго числа Чженя $c_2(\mathcal{G})$ пучка $\mathcal{G}$ посредством адельных матриц перехода для пучка $\mathcal{G}$ и при помощи другого центрального расширения $\widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$ группой $\mathbb{Z}$, построенного из центрального расширения $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)}$.

Вычисления с адельными матрицами перехода для пучка $\mathcal{G}$ и центральным расширением $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ можно проделать двумя разными способами. Сравнение полученных двух ответов приводит к теореме Римана–Роха для пучка $\mathcal{G}$ на поверхности $X$ (без формулы Нётера).

**Список литературы**


[1] D.V. Osipov. Second Chern numbers of vector bundles and higher adeles. Bull. Korean Math. Soc. **54** (2017), no. 5, 1699–1718; arXiv: `math.AG/1706.07354`.

[2] D.V. Osipov. Central extensions and Riemann–Roch theorem on algebraic surfaces, arXiv: `math.AG/2105.14626` (2021).


## Инварианты унипотентного радикала параболической подгруппы


**А.Н. Панов**[1]

**Самарский университет, Самара, Россия**

`apanov@list.ru`


Известно, что поле инвариантов для рационального действия произвольной унипотентной группы на аффинном многообразии рационально, то есть является чисто трансцендентным расширением основного поля [1]. Отметим, что здесь поле инвариантов является полем частных алгебры инвариантов. Ставится задача нахождения системы свободных образующих в поле инвариантов в явном виде.

Пусть $K$ — поле характеристики нуль и $P$ — параболическая подгруппа в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, K)$. Имеет место разложение $P = LU$ группы $P$ в полупрямое произведение унипотентного радикала $U$ и подгруппы Леви $L$. Подгруппа $P$ определяется разбиением целочисленного отрезка $[1, n]$ на систему последовательных непересекающихся отрезков $[1, n] = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \ldots \sqcup I_\ell$. Линейное пространство $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}(n, K)$ является прямой суммой $\mathcal{M} = \bigoplus_{1 \leqslant k,m \leqslant n} \mathcal{M}_{km}$, где $\mathcal{M}_{km}$ натянуто на матричные единицы $E_{ij},\ \ (i, j) \in I_k \times I_m$. Унипотентная подгруппа $U$ состоит из матриц $E + A$, где $E$ — единичная матрица и $A$ лежит в сумме подпространств $\mathcal{M}_{km}$, $k < m$.

Рассмотрим присоединённое представление $\mathrm{Ad}_g x = gxg^{-1}$ группы $U$ в пространстве $\mathrm{Mat}(n, K)$. Определено представление группы $U$ в алгебре $\mathcal{A}$ регулярных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$ по формуле $\rho_g f(X) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} X)$.. Это представление продолжается до действия $U$ в поле $\mathcal{F}$ рациональных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$. Наша цель состоит в построении системы свободных образующих в поле инвариантов $\mathcal{F}^U$. Случай $U = \mathrm{UT}(n, K)$ был рассмотрен в работе [2].


[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–01–00091а.