Бесконечная транзитивность для простейших многообразий Калоджеро–Мозера

К.Г. Куюмжиян
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
karina@mccme.ru

Доклад основан на работе автора [6]. Рассмотрим алгебраическое многообразие X и группу всех его регулярных автоморфизмов. Нас интересует, для каких многообразий X можно перевести любые m точек в любые m других для любого натурального m. Такие многообразия достаточно редки. В частности, для такого X группа его регулярных автоморфизмов должна быть бесконечномерной.

Мы рассматриваем в качестве X простейшие многообразия Калоджеро–Мозера и доказываем, что для них выполняется свойство, указанное выше, причём достаточно вместо всей группы регулярных автоморфизмов взять только автоморфизмы определённого вида. Они образуют группу, изоморфную группе унимодулярных автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры от двух переменных. Берестом–Эшматовым–Эшматовым [3, Theorem 1] была доказана 2-транзитивность данного действия и сформулирована гипотеза, что данное действие является бесконечно транзитивным.

Определение. Многообразием Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$ называется

$$\mathcal{C}_n := \{(X,Y) \in Mat_n(\mathbb{C}) \times Mat_n(\mathbb{C}) : \ \mathrm{rk}([X,Y]+I_n) = 1\} /\!\!/ PGL_n(\mathbb{C}),$$

где $PGL_n(\mathbb{C})$ действует как $g.(X,Y) = (gXg^{-1}, gYg^{-1})$.

Многообразия (пространства) Калоджеро–Мозера важны в теории представлений. Известно, что $\mathcal{C}_n$ является гладким неприводимым аффинным алгебраическим многообразием размерности $2n$, см. Wilson [9]. Оно рационально, см. [9, Prop. 1.10] и [8, Remark 5]. На нём есть гиперкэлерова структура, см. [9, Section 8], [5, Theorem 1.22]. Оно является простейшим случаем колчанного многообразия Накаджимы. Это частичная компактификация интегрируемой системы Калоджеро–Мозера.

Определение. Обозначим через G подгруппу в группе автоморфизмов свободной алгебры $\mathbb{C}\langle X,Y\rangle$, порождённую преобразованиями двух видов:

$$(X,Y) \mapsto (X+p(Y),Y), \ p \text{ является многочленом от одной переменной}, \quad (1)$$

$$(X,Y) \mapsto (X,Y+q(X)), \ q \text{ является многочленом от одной переменной}. \quad (2)$$

Автоморфизмы этих двух видов называются треугольными. Группа G совпадает с группой унимодулярных автоморфизмов $\mathbb{C}\langle X,Y\rangle$ (автоморфизм

$\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ называется унимодулярным, или симплектическим, если он сохраняет коммутатор $[x, y] = xy - yx$), см. [4, 8.10.Théorème], и также известно, что эта группа изоморфна группе автоморфизмов первой алгебры Вейля [7, Theorem 2].

Формулы (1) и (2) задают действие G на $Mat_n(\mathbb{C}) \times Mat_n(\mathbb{C})$. Это действие можно спустить на $\mathcal{C}_n$. Действительно, для корректности нужно проверить две вещи. Во-первых, формулы (1) и (2) согласованы с $PGL_n(\mathbb{C})$-действием. Во-вторых, получаемые точки принадлежат $\mathcal{C}_n$: $[X + p(Y), Y] = [X, Y] = [X, Y + q(X)]$, следовательно,

$$\mathrm{rk}([X + p(Y), Y] + I_n) = \mathrm{rk}([X, Y + q(X)] + I_n) = \mathrm{rk}([X, Y] + I_n) = 1.$$

Теорема[6]. Группа G действует на многообразии Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$ бесконечно транзитивно.

В основе доказательства лежит следующее наблюдение. Если у X-компонент рассматриваемых точек минимальные многочлены взаимно просты, то мы можем двигать данные точки независимо при помощи автоморфизмов вида (2) (и аналогично для Y-компонент).

Данный результат нельзя вывести из результатов о гибкости [1], поскольку в нашу уменьшенную группу автоморфизмов попадают не все однопараметрические унипотентные подгруппы, действующие на X.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), 767–823.
[2] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sb. Math. **203** (2012), 3–30.
[3] Yu. Berest, A. Eshmatov, F. Eshmatov. Multitransitivity of Calogero–Moser spaces. Transform. Groups **21** (2016), 35–50.
[4] J. Dixmier. Sur les algèbres de Weyl. Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 209–242.
[5] P. Etingof. Calogero–Moser systems and representation theory. Zur. Lect. Adv. Math., 2007.
[6] K. Kuyumzhiyan. Infinite transitivity for Calogero–Moser spaces. Proceedings of the American Mathematical Society **148** (2020), 3723–3731.
[7] L. Makar-Limanov. On automorphisms of the Weyl algebra. Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 359–363.

[8] V. L. Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups **19** (2014), 549–568.
[9] G. Wilson. Collisions of Calogero–Moser particles and an adelic Grassmannian (with an Appendix by I. G. Macdonald). Invent. Math. **133** (1998), 1–41.

p-Подгруппы в трёхмерной группе Кремоны

К.В. Логинов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
loginov@mi-ras.ru

Доклад основан на работе [4]. Будем работать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ называется группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$. При $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Начиная с $n \geqslant 2$, группа Кремоны становится достаточно сложным объектом для изучения. Один из способов понять её структуру состоит в том, чтобы исследовать её конечные подгруппы. При $n = 2$ такие подгруппы были классифицированы И.В. Долгачевым и В.А. Исковских в работе [2]. В размерности 3 ситуация становится более интересной, и полная классификация представляется недоступной. Тем не менее, можно получать классификационные результаты для некоторых классов конечных подгрупп, см. например [5] в случае простых групп. Также имеются различные результаты об ограниченности конечных подгрупп в группе Кремоны (см. [8]), показывающие, что далеко не всякая группа может быть реализована как подгруппа в ней.

Довольно естественно рассмотреть такой класс конечных групп как p-группы. Напомним, что p-группой называется группа порядка p^k, где p – простое число. Определим число $r(G)$, называемое *рангом* p-группы G, как наименьшее число порождающих элементов для G. Рассмотрим следующую задачу (см. [10]): оценить сверху ранг p-групп, вкладывающихся в группу Кремону $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Полное решение этой задачи для $n = 2$ было получено А. Бовилем [1].

В больших размерностях можно рассматривать более общую задачу и вместо группы Кремоны изучать группу бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ рационально связного многообразия X и её p-подгруппы. При $n = 3$ точная оценка на ранг p-подгрупп была получена для $p = 2$ и $p \geqslant 5$, см. теорему 3. Для $n = 3$, $p = 3$ в работе [3] оценка $r(G) \leqslant 4$ было получена по модулю трёх исключительных случаев. В работе [4] получен следующий результат.