УДК 531.38

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Темнов А.Н., Ян Наинг У
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия,
antt45@mail.ru, yanaingoo5256@gmail.com

Ключевые слова: переменные Лагранжа, уравнение Фридмана, вихревое движение, система координат.

В статье рассмотрено квазитвёрдоедвижение неоднородной несжимаемой вращающейся жидкости, полностью заполняющей неподвижную эллипсоидальную полость. Под квазитвёрдым движением неоднородной жидкости понимается движение, при котором скорости и плотность жидкости зависят линейными образом от координат и вихрь скорости частиц жидкости имеет одинаковые значения и зависит только от времени. Используя переменные Лагранжа, получены уравнения движения неоднородной жидкости, которые совпадают с уравнениями движения тяжелого твёрдого тела вокруг неподвижной точки, записанные в неподвижной системе координат, произвольно расположенной относительно направления однородного поля сил тяжести.

Введем правую неподвижную систему координат $K:Ox_1x_2x_3$ с началом в геометрическом центре полости и с осями, совпадающими с полуосями b_i. Введём также правую подвижную систему координат $K_0:Ox_1^0x_2^0x_3^0$, связанную с частицами жидкости. Пусть $x_1^0=a,\ x_2^0=b,\ x_3^0=c$ – переменные Лагранжа, характеризующие начальное положение частицы жидкости в полости в системе K_0. Для описания кинематической картины движения неоднородной жидкости прибегнем к методу, используемому Пуанкаре [1], для описания аналогичного движения однородной жидкости. Тогда для частиц жидкости будут справедливы выражения

$$\frac{x_j}{b_j}=\alpha_{j1}\frac{a}{b_1}+\alpha_{j2}\frac{b}{b_2}+\alpha_{j3}\frac{c}{b_3}\ , \qquad (j=1,2,3), \quad (a,b,c)\,, \tag{1}$$

которые, и примем для описания в переменных Лагранжа однородного вихревого движения жидкости.

Положим, что в начальный момент времени обе системы координат совпадают.Движение жидкости в полости опишем в переменных Лагранжа уравнениями [3].

$$\rho_0\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a}+\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a}+\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial a}-\mathrm{A}_a^0\right)=-\frac{\partial p}{\partial a}, \qquad (a,b,c)\,, \tag{2}$$

где p – давление; ρ_0 – плотность жидкости,

$$\rho_0=S_0+S_1^0\,a+S_2^0\,b+S_3^0\,c\,, \tag{3}$$

символы (a,b,c) рядом с уравнениями указывают, что два других не выписанных уравнения получаются из написанного перестановкой букв, указанных в скобках.

$$\mathrm{A}_a^0=\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial a}, \qquad (1,2,3)\,, \tag{4}$$

Φ – потенциал массовых сил, действующих на жидкость. Пусть, полость произвольно расположена в пространстве с однородным полем сил тяготения. Потенциал Φ в этом случае представим как

$$\Phi = (\gamma_1 \cdot x_1 + \gamma_2 \cdot x_2 + \gamma_3 \cdot x_3)g\ , \qquad (5)$$

где $\gamma_i\,(i = 1, 2, 3) = const$ – направляющие косинусы, определяющие положение осей b_i, относительно направления однородного поля сил тяжести.

Подставим выражения (3), (4) и (5) в уравнение гидродинамики (2). Применив операцию *rot* к полученному выражению,получимуравнения А. А. Фридмана [4] вихревого движения жидкости в переменных Лагранжа. После несложных, но громоздких преобразований, использований уравнений статики и интегрирования по объёму эллипсоида имеем

$$\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{1j} + A_2\omega_2\alpha_{2j} + A_3\omega_3\alpha_{3j}) = mg(c_2^0\gamma_3^0 - c_3^0\gamma_2^0)\ , \quad \text{(j=1,2,3), (1,2,3),} \qquad (6)$$

где $c_j^0 = \dfrac{S_j^0 b_j^2}{5S_0}$ – координаты центра масс жидкости; m – масса жидкости.

Уравнения однородного вихревого движения неоднородной жидкости(6)совпадают по форме записи с уравнениями движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, написанными в проекциях на оси неподвижной системы координат при произвольной ориентации последней относительно направления однородного поля сил тяжести.

Список литературы

1. Poincare, H. Sur la precession des corps deformables / H. Poincare // Bulletinastronomique, 1910. – Vol. 27. – P. 321-356.
2. Жуковский, Н.Е. О движения твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н.Е. Жуковский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 137 с.
3. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
4. Фридман, А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости / А.А. Фридман – М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 377 с.
5. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер. – М.: Наука, 1981. – 366 с.

HYDRODYNAMIC ANALOGUE OF THE MOTIONS OF A HEAVY RIGID BODY

Temnov A.N., Yan Naing Oo
Bauman Moscow State Technical University, BMSTU, Moscow, Russia,
antt45@mail.ru, yanaingoo5256@gmail.com

Keywords: Lagrange variables, Friedmann equation, vortex motion, coordinate system.

In this article considered the quasi-solid motion of an inhomogeneous incompressible rotating fluid that completely filled in a stationary ellipsoidal cavity. The quasi-solid motion of an inhomogeneous fluid is understood as a process in which the velocities and density of the fluid depend linearly on the coordinates and the vortex of the velocity of fluid particles has the same values and depends only on the time. Using the Lagrange variables, the equations of motion of an inhomogeneous fluid are obtained, which coincide with the equations of motion of a heavy rigid body around a fixed point, written in a fixed coordinate system arbitrarily located relative to the direction of a homogeneous gravity field.