УДК 621.644.03.001.57

В.П.Шорин

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОПУСКАЕМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК БЛОКОВ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В практике исследования сложных линейных систем на АВМ широко применяется метод структурного моделирования.

С целью упрощения моделей обычно прибегают к апроксимации характеристик отдельных элементов исходной системы зависимостями, обеспечивающими наиболее простые структуры блоков, составляющих модель. Вследствие аппроксимации характеристики блоков модели отличаются от характеристик соответствующих элементов системы и моделирование получается приближенным. Поэтому важным является определение допускаемых отклонений характеристик блоков от характеристик элементов системы, исходя из заданной точности отображения на модели тех или иных характеристик системы в целом.

Одна и та же точность моделирования системы может быть достигнута при различных соотношениях погрешностей характеристик составляющих блоков. Оптимальной будем считать модель, в которой реализовано такое соотношение погрешностей характеристик блоков, при котором заданная точность моделирования обеспечивается при максимальной сумме величин погрешностей характеристик составляющих блоков, взятых с необходимыми весовыми коэффициентами.

Рассмотрим задачу оптимизации структурной модели при условии обеспечения точности воспроизведения матрицы амплитудно-фазовых характеристик системы не ниже заданной.

При решении задачи полагается, что реализована некоторая исходная модель, которая подлежит оптимизации и на которой возможно приближенное определение значений функций чувствительности по отношению к вариациям коэффициентов передачи блоков. Полагается также, что модель системы с m входами и n выходами состоит из k блоков, каждый из которых имеет q входов, r выходов и отображает соответствующий элемент системы.

Условия заданной точности моделирования определим матрицей модулей относительных отклонений амплитудно-фазовых характеристик, имеющей норму:

$$\|\Delta \bar{M}\| = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} N_{ij} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \frac{W_{ij} - W_{ijm}}{W_{ij}} \right| d\omega \leqslant \varepsilon, \qquad (1)$$

где W_{ij} и W_{ijm} – соответственно амплитудно-фазовые характеристики системы и модели для j -го входа и i-го выхода;

ε – допускаемая величина нормы матрицы отклонений;

ω – круговая частота;

N_{ij} – весовой коэффициент;

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – полоса частот моделирования.

Погрешность аппроксимации характеристик отдельного блока модели зададим нормой вида:

$$\|\Delta \bar{z}\| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r} \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \Delta \bar{z}_{\mu\nu} \right|^2 d\omega}, \qquad (2)$$

где $\Delta \bar{z}_{\mu\nu}$ – погрешность аппроксимации характеристики блока, связывающей ν -й вход и μ -й выход.

Определим связь между $\|\Delta \bar{M}\|$ и $\|\Delta \bar{z}\|$. Принимая погрешности аппроксимации характеристик блоков малыми, можно записать:

$$\frac{W_{ij} - W_{ijm}}{W_{ij}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \left(\frac{W_{ij} - W_{ijm}}{W_{ij}} \right)_\lambda ; \qquad (3)$$

$$\left(\frac{W_{ij} - W_{ijm}}{W_{ij}} \right)_\lambda = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r} \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \frac{\partial \ln W_{ij}}{\partial \ln \bar{z}_{\mu\nu}} \Delta \bar{z}_{\mu\nu} \right), \qquad (4)$$

где $\dfrac{\partial \ln W_{ij}}{\partial \ln z_{\mu\nu}}$ – соответствующая логарифмическая функция чувствительности.

Каждая из функций чувствительности определяется на исходной модели (модели, подлежащей оптимизации) известными методами (см.,напр., [I]).

Так как исходная модель является приближенной, то вследствие погрешностей, присущих ей:

$$\frac{\partial \ln W_{ij}}{\partial \ln z_{\mu\nu}} = \left(Q_{\mu\nu} + \Delta Q_{\mu\nu}\right)_{ij},$$

где $Q_{\mu\nu}$ – приближенное значение логарифмической функции чувствительности, определенное на исходной модели;

$\Delta Q_{\mu\nu}$ – погрешность определения функции чувствительности.

Пренебрежение в последнем соотношении величиной $\Delta Q_{\mu\nu}$ не очевидно, так как на отдельных частотах значение погрешности может быть соизмеримо с $Q_{\mu\nu}$. Средние же или среднеквадратические значения модуля погрешности для достаточно широкой полосы частот моделирования обычно малы по сравнению с теми же значениями $|Q_{\mu\nu}|$.

С использованием условий (3), (4) и последнего равенства, соотношение (I) запишем в виде:

$$\|\Delta\overline{M}\| = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left[\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left(Q_{\mu\nu}+\Delta Q_{\mu\nu}\right)_{ij}\Delta z_{\mu\nu}\right]\right|d\omega \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Вполне очевидно

$$\|\Delta\overline{M}\| \leq \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left(Q_{\mu\nu}+\Delta Q_{\mu\nu}\right)_{ij}\Delta\overline{z}_{\mu\nu}\right|_{\lambda}\right]d\omega \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left(Q_{\mu\nu}\right)_{ij}\Delta\overline{z}_{\mu\nu}\right|_{\lambda} + \right. \quad (6)$$
$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left(\Delta Q_{\mu\nu}\right)_{ij}\Delta\overline{z}_{\mu\nu}\right|_{\lambda}\right]d\omega.$$

Применяя неравенство Буняковского к суммам, находящимся под знаком интеграла, в правой части неравенства (6) будем иметь:

$$\|\Delta\overline{M}\| \leq \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\left\{\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left(\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}}\ \sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta\overline{z}_{\mu\nu}\right|^{2}}\right)_{\lambda}\right]d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\left(\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}}\ \sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta\overline{z}_{\mu\nu}\right|^{2}}\right)_{\lambda}d\omega\right\} \leq$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\left[\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}\right)_{\lambda}}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta\bar{z}_{\mu\nu}\right|^{2}\right)_{\lambda}}\,d\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{N_{ij}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}\right)_{\lambda}}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\left|\Delta\bar{z}_{\mu\nu}\right|^{2}\right)_{\lambda}}\,d\omega\right]. \qquad (7)$$

Применяя к интегралам неравенство Гельдера, получим:

$$\|\Delta\bar{M}\|\leqslant\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}\left[\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{N_{ij}^{2}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}d\omega\right)_{\lambda}}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\Delta\bar{z}_{\mu\nu}\right|^{2}d\omega\right)_{\lambda}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{N_{ij}^{2}}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\Delta Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}d\omega\right)_{\lambda}}\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\Delta\bar{z}_{\mu\nu}\right|^{2}d\omega\right)_{\lambda}}\right].$$

При учете (2) из последнего неравенства следует, что если выполняется условие

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\|\Delta\bar{z}\|_{\lambda}^{2}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=m}\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=k}N_{ij}^{2}\|Q_{ij}\|_{\lambda}^{2}}+\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=m}\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=k}N_{ij}^{2}\|\Delta Q_{ij}\|_{\lambda}^{2}}}, \qquad (8)$$

где

$$\|Q_{ij}\|=\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}d\omega}\ ;\quad \|\Delta Q_{ij}\|=\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\sum_{\nu=1}^{\nu=q}\frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\Delta Q_{\mu\nu}\right|_{ij}^{2}d\omega},$$

то условие (I) также выполняется.

Ввиду того, что в полосе моделирования норма матрицы отклонений функций чувствительности блока, как правило, мала по сравнению с нормой матрицы номинальных значений, вторым слагаемым в знаменателе выражения (8) можно пренебречь и соотношение записать в виде:

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\|\Delta\bar{z}\|_{\lambda}^{2}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=m}\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=k}N_{ij}^{2}\|Q_{ij}\|_{\lambda}^{2}}}. \qquad (9)$$

Условие (9) выполняется при бесконечном множестве наборов чисел $\|\Delta\bar{z}\|_\lambda$. Оптимальным будем считать такой набор, при котором

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K} N_\lambda \|\Delta\bar{z}\|_\lambda = max \, . \tag{10}$$

где N_λ – весовой коэффициент, характеризующий значимость λ -го блока модели.

Воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа, условие максимума суммы (10) при удовлетворении неравенства (9) запишем:

$$\|\Delta\bar{z}\|_\lambda \leq \frac{N_\lambda}{\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=K} N_\lambda^2}} \, \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=m}\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=K} N_{ij}^2 \|Q_{ij}\|_\lambda^2}} \tag{11}$$

При выполнении гипотезы равнозначности блоков, т.е. $N_1 = N_2 = \ldots = N_K$, формула (11) примет вид

$$\|\Delta\bar{z}\|_\lambda = \frac{1}{\sqrt{K}} \, \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=m}\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=K} N_{ij}^2 \|Q_{ij}\|_\lambda^2}} \; . \tag{12}$$

Для оценки точности моделирования могут быть использованы нормы более жесткие в сравнении с (1), например,

$$\Delta\bar{M}_{ij} = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\frac{W_{ij} - W_{ijm}}{W_{ij}}\right| d\omega \leq \varepsilon_{ij} \, , \tag{13}$$

где ε_{ij} – допускаемая погрешность моделирования характеристики W_{ij} .

Аналогично можно показать, что в этом случае соотношение между допускаемыми погрешностями моделирования характеристик системы и погрешностями аппроксимации характеристик составляющих блоков определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\|\Delta\bar{z}\|_\lambda^2} \leq \frac{\varepsilon_{11}}{\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=K}\|Q_{11}\|_\lambda^2}} \; ; \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ &\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K}\|\Delta\bar{z}\|_\lambda^2} \leq \frac{\varepsilon_{mn}}{\sqrt{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=K}\|Q_{nm}\|_\lambda^2}} \; . \end{aligned} \tag{14}$$

Так как левая часть всех неравенств (I4) одинакова, условие моделирования каждого элемента матрицы с точностью не ниже заданной будет удовлетворено, если среднеквадратическое суммы норм матриц отклонений характеристик блоков будет меньше или равно наименьшему из чисел в правой части системы (I4), т.е., если

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K} \|\Delta\bar{z}\|_{\lambda}^{2}} \leqslant \inf\left(\frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K} \|Q_{ij}\|_{\lambda}^{2}}}\right).$$

Максимум суммы (I0) реализуется соответственно при выполнении условий

$$\|\Delta\bar{z}\|_{\lambda} \leqslant \frac{N_{\lambda}}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K} N_{\lambda}^{2}}}\left[\inf\left(\frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=K} \|Q_{ij}\|_{\lambda}^{2}}}\right)\right].$$

Л и т е р а т у р а

I. А р х а н г е л ь с к и й Б.А., З н а м е н с к и й А.А. и др. Моделирование на аналоговых вычислительных машинах. М., "Энергия", I972.