

УДК 681.5.015.2.44

С.В.Михайлов, В.А.Сойфер

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ АЛГОРИТМОВ  
ИДЕНТИФИКАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

При решении практических задач идентификации динамических систем возникает неизбежная проблема выбора наилучших в данных условиях алгоритмов разработанных к настоящему времени. Если вопросам синтеза алгоритмов посвящено значительное число монографий, то задача их сравнительного анализа исследуется лишь в небольшом числе разрозненных статей [1] - [4]. В данной работе анализируются два алгоритма идентификации применительно к системам с импульсными входными сигналами - инвариантное погружение и квазилинеаризация. Достоинством первого алгоритма является его идейная простота и гибкость. Второй алгоритм использует мощный и хорошо развитый вычислительный метод - квазилинеаризацию.

Алгоритм инвариантного погружения. Рассмотрим стационарную систему с одним входом и одним выходом, для которой дискретные модели формирования сигнала и наблюдений линейны и задаются уравнениями:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + \bar{b}u(k) + \bar{d}w(k); \quad (1)$$

$$z(k) = \bar{h}^T x(k) + V(k), \quad (2)$$

где  $\bar{x}$  -  $N$  - мерный вектор состояния;

$A$  -  $N \times N$  матрица,  $N$  элементов которой составляют неизвестные параметры (вектор  $\bar{a}$ );

$\bar{b}, \bar{d}, \bar{h}$  -  $N$  - мерные векторы, причем компоненты  $\bar{b}$  и  $\bar{d}$  также неизвестны;  $\bar{h}^T = [10 \dots 0]$ ;

$u(k)$  и  $z(k)$  - дискреты соответственно входа и наблюдения.

Шумы  $W(\kappa)$  и  $V(\kappa)$  предполагаются белыми гауссовскими, так что

$$W(\kappa) \sim N[0, W], V(\kappa) \sim N[0, V].$$

Прямой подход к задаче одновременного оценивания параметров и состояний (обобщенная калмановская фильтрация) предполагает расширение вектора состояний системы за счет неизвестных параметров:

$$\bar{x}^T(\kappa) = [\bar{x}^T(\kappa), \bar{a}^T(\kappa), \bar{b}^T(\kappa), \bar{d}^T(\kappa)]. \quad (3)$$

Разностные уравнения, определяющие неизвестные параметры, записываются:

$$\bar{a}(\kappa+1) = \bar{a}(\kappa); \quad \bar{b}(\kappa+1) = \bar{b}(\kappa); \quad \bar{d}(\kappa+1) = \bar{d}(\kappa). \quad (4)$$

Объединяя (1)-(4), модифицируем (1)-(2) для расширенного вектора состояний. Очевидно, что даже в случае принятой линейной модели системы задача оценки имеет нелинейный характер:

$$\bar{x}(\kappa+1) = \bar{f}(\bar{x}(\kappa), u(\kappa), \kappa) + \bar{\Gamma}(\bar{x}(\kappa))W(\kappa); \quad (5)$$

$$z(\kappa) = \bar{h}^T \bar{x}(\kappa) + V(\kappa), \quad (6)$$

где все векторы и вектор-функция  $\bar{f}$  имеют размерность  $4 \times N$ . Поскольку  $u(\kappa)$  не является параметром - оно доступно наблюдению, в дальнейшем мы его будем опускать из числа аргументов  $\bar{f}$ .

Выбрав в качестве критерия оптимальности условную плотность вероятности  $p[\{\bar{x}(\kappa)\}_n | \{z(\kappa)\}_n]$ , получим при ее максимизации по последовательности  $\{\bar{x}(\kappa)\}_n$  байесовскую максимально правдоподобную оценку или оценку максимума апостериорной вероятности. Она определяется решением нелинейной двухточечной краевой задачи [5]:

$$\hat{\bar{x}}(\kappa+1/n) = \bar{f}[\hat{\bar{x}}(\kappa/n), \kappa] - \bar{\Gamma}[\hat{\bar{x}}(\kappa)]W\bar{\Gamma}^T[\hat{\bar{x}}(\kappa/n)]\psi^T \hat{\bar{x}}(\kappa/n); \quad (7)$$

$$\hat{\bar{x}}(\kappa+1/n) = \psi^T \hat{\bar{x}}(\kappa/n) + V^{-1}[z(\kappa+1) - \bar{h}^T \hat{\bar{x}}(\kappa+1/n)]; \quad (8)$$

$$\psi = \frac{\partial \bar{f}^T[\hat{\bar{x}}(\kappa/n), \kappa]}{\partial \hat{\bar{x}}(\kappa/n)}; \quad (9)$$

$$\hat{\bar{x}}(0/0) = -V_{\bar{x}_0}^{-1}[\hat{\bar{x}}(0) - \bar{\mu}]; \quad \hat{\bar{x}}(n/n) = 0. \quad (10)$$

Предполагается, что  $\bar{x}_0$  нормальна со средним  $\bar{\mu}$  и дисперсией  $V_{\bar{x}_0}$ .

Инвариантное погружение, смысл которого заключается в обобщении - инвариантном погружении ДТКЗ (7) - (10) в ДТКЗ с более общими граничными условиями, решения последней и последующего выделения решения исходной ДТКЗ (подробно этот метод излагается, например, в [5]), приводит к уравнениям последовательного оценивания. Укажем итоговые соотношения:

одношаговое предсказание

$$\hat{x}(\kappa+1/\kappa) = \bar{F} [\hat{x}(\kappa), \kappa]; \quad (11)$$

алгоритм фильтрации

$$\hat{x}(\kappa+1) = \hat{x}(\kappa+1/\kappa) + P(\kappa+1)h^T V^{-1} [z(\kappa+1) - h^T \hat{x}(\kappa+1/\kappa)]; \quad (12)$$

уравнение для априорной дисперсии

$$P(\kappa+1/\kappa) = \bar{F} [\hat{x}(\kappa)] W \bar{F}^T [\hat{x}(\kappa)] + \frac{\partial \bar{F} [\hat{x}(\kappa), \kappa]}{\partial \hat{x}(\kappa)} P(\kappa) \frac{\partial \bar{F}^T [\hat{x}(\kappa), \kappa]}{\partial \hat{x}(\kappa)}; \quad (13)$$

уравнение для дисперсии ошибки

$$P(\kappa+1) = P(\kappa+1/\kappa) - \begin{bmatrix} P_{11}(\kappa+1/\kappa) \\ P_{1n1}(\kappa+1/\kappa) \end{bmatrix} [P_{11}(\kappa+1/\kappa) + V]^{-1} \times \\ \times [P_{11}(\kappa+1/\kappa) \dots P_{1n1}(\kappa+1/\kappa)]. \quad (14)$$

При реализации алгоритма на ЭВМ в памяти хранятся, с обновлением на каждом шаге, матрицы  $\hat{x}(\kappa)$ ,  $P(\kappa)$  и  $\frac{\partial \bar{F} [\hat{x}(\kappa), \kappa]}{\partial \hat{x}(\kappa)}$  и для практических задач требуемый объем памяти невелик.

Матрица  $\frac{\partial \bar{F} [\hat{x}(\kappa), \kappa]}{\partial \hat{x}(\kappa)}$  определяется из соотношения:

$$\frac{\partial \bar{F} [\hat{x}(\kappa), \kappa]}{\partial \hat{x}(\kappa)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \Gamma 0 \dots & & & 0 \\ 0 1 \Gamma \dots & & & \vdots \\ -x_{n+1}^j(\kappa) \Gamma \dots & [1-x_{2n}(\kappa)] \Gamma & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\kappa) \Gamma I \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

где  $\Gamma$  - шаг дискретизации по времени.

Как видим, эта матрица содержит много нулевых элементов, поэтому, используя одновременно симметричность матрицы дисперсий ошибки, уравнение (13) можно существенно упростить, правда, в ущерб наглядности и универсальности алгоритма.

Указанное преобразование уравнения (13) позволяет значительно повысить скорость вычисления оценок, что особенно важно при идентификации в контуре управления.

Алгоритм квазилинеаризации. Многоточечные краевые задачи (МТКЗ) самым естественным образом возникают при идентификации систем. Так, чтобы переформулировать задачу обобщенного оценивания (5), (6) как МТКЗ, достаточно лишь интерпретировать уравнение наблюдений (6) как набор линейных ограничений, заданных в точках измерений. Для решения такого класса задач наиболее эффективными являются итеративные методы [6].

Линеаризуем  $\bar{\varphi}$  в окрестности траектории  $\hat{x}^i(\kappa)$ , предполагая что входной шум пренебрежимо мал [5]:

$$\hat{x}^{i+1}(\kappa+1) = \bar{\varphi} \left[ \hat{x}^i(\kappa), \kappa \right] + \frac{d\bar{\varphi} \left[ \hat{x}^i(\kappa), \kappa \right]}{d\hat{x}^i(\kappa)} \left[ \hat{x}^{i+1}(\kappa) - \hat{x}^i(\kappa) \right]$$

(здесь сохранен прежний смысл обозначений).

Решение этого уравнения имеет вид [6]:

$$\hat{x}^{i+1}(\kappa) = Q^{i+1}(\kappa) \hat{x}^{i+1}(0) + \bar{P}^{i+1}(\kappa), \quad (15)$$

где  $Q^{i+1}(\kappa)$  - является решением разностного уравнения

$$Q^{i+1}(\kappa+1) = \frac{\partial \bar{\varphi} \left[ \hat{x}^i(\kappa), \kappa \right]}{\partial \hat{x}^i(\kappa)} Q^{i+1}(\kappa) \quad (16)$$

с начальным условием  $Q^{i+1}(0) = I$ , а  $\bar{P}^{i+1}(\kappa)$  - решение уравнения

$$\bar{P}^{i+1}(\kappa+1) = \bar{\varphi} \left[ \hat{x}^i(\kappa), \kappa \right] - \frac{\partial \bar{\varphi} \left[ \hat{x}^i(\kappa), \kappa \right]}{\partial \hat{x}^i(\kappa)} \left[ \hat{x}^i(\kappa) - \bar{P}^{i+1}(\kappa) \right] \quad (17)$$

с начальным условием  $\bar{P}^{i+1}(0) = 0$ .

Найдем оценку расширенного вектора состояний, которая доставляет минимум показателю качества

$$J = \sum_{\kappa=1}^n (z(\kappa) - \bar{h}^T \bar{x}(\kappa))^2. \quad (18)$$

Для системы с одним выходом и при стационарном шуме наблюдений оценка, полученная из (18), будет оценкой максимума апостериорной вероятности:

$$\left\{ \sum_{\kappa=1}^n \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{i+1}(\kappa) \\ \vdots \\ \Omega_{14N}^{i+1}(\kappa) \end{bmatrix} \left[ \Omega_{11}^{i+1}(\kappa) \dots \Omega_{14N}^{i+1}(\kappa) \right] \right\} \bar{x}^{i+1}(0) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^n \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{i+1}(\kappa) \\ \vdots \\ \Omega_{14N}^{i+1}(\kappa) \end{bmatrix} \left[ z(\kappa) - \bar{p}^{i+1}(\kappa) \right]. \quad (19)$$

Дальнейший алгоритм очевиден - по вновь скорректированной из (19) оценке начального состояния определяем всю траекторию  $\bar{x}^{i+1}(\kappa)$  по (15). Признаком окончания вычислительной процедуры служит малая невязка значений параметров на двух последовательных итерациях.

Отметим, что для отыскания  $\bar{x}^{i+1}(\kappa)$  по  $\bar{x}^{i+1}(0)$  необходимо найти  $\Omega^{i+1}(\kappa)$  и  $\bar{p}^{i+1}(\kappa)$ , что связано с запоминанием  $\sim (3N)^2 n$  величин. Как видим, даже при небольших порядках модели, но значительных интервалах наблюдения необходимость хранения  $\Omega^{i+1}(\kappa)$  и  $\bar{p}^{i+1}(\kappa)$  становится решающей трудностью.

Однако поскольку входной шум отсутствует, новую оценку траектории можно получить непосредственно по уравнению системы

$$\bar{x}^{i+1}(\kappa+1) = \bar{y} \left[ \bar{x}^{i+1}(\kappa), \kappa \right].$$

В этом случае требования к объему памяти минимальны ( $\sim 3Nn$ ), уравнения (16) и (17) решаются на каждой итерации лишь однажды, а затраты машинного времени для инвариантного погружения и описываемого алгоритма соизмеримы.

Аналогичная экономия памяти достигается и использованием другой процедуры, которая и была реализована программно. В ней уравнения (16) и (17) решаются на одной итерации дважды, а улучшенная оценка траектории ищется по (15).

Предпочтение данной вычислительной процедуре мы отдали в силу ее универсальности - она работоспособна и когда  $W \neq 0$ , тогда как первая в этом случае приводит к расходящемуся решению.

Результаты моделирования и сравнительный анализ алгоритмов. По описанным алгоритмам (II) - (14) и (15) - (17), (19) написаны программы на языке Алгол-60. Они оформлены как процедуры и работают с моделями произвольного порядка.

Экспериментальное исследование алгоритмов произведено на системе первого порядка. Входной шум предполагается отсутствующим. Входной сигнал (прямоугольный импульс) интегрировался, а затем выходная последовательность искажалась дискретным белым шумом.

Уравнение экспериментального звена имеет вид:

$$\dot{y}(t) + 22y(t) = 22u(t).$$

Таким образом, истинные значения параметров  $\alpha = \beta = 22$ .

Сначала укажем частные результаты, полученные для каждого алгоритма, а затем произведем их сравнительную оценку.

Инвариантное погружение. В табл. 1 и 2 представлены МАВ-оценки параметров системы.

Т а б л и ц а 1

Итерация	$S/W = 4,6$		$S/W = 9$		СигНАЛ/ШУМ		$S/W = 25$	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	15.000	18.000	15.000	18.000	15.000	18.000	5.000	2.000
140	20.200	20.341	20.892	20.689	21.631	21.061	22.042	21.443
280	21.238	21.340	21.756	21.526	22.235	21.663	22.521	21.922
420	21.735	21.811	22.134	21.886	22.473	21.897	22.693	22.095
560	22.036	22.094	22.353	22.093	22.603	22.023	22.784	22.185

Т а б л и ц а 2

Итерация	$S/W = 4,6$		$S/W = 9$		$S/W = 25$			
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	15.000	18.000	15.000	18.000	15.000	18.000	5.000	2.000
140	24.425	24.513	23.416	23.131	22.815	22.183	22.818	22.188
280	24.082	24.079	23.411	23.093	22.977	22.356	22.980	22.360
420	23.922	23.904	23.396	23.070	23.026	22.409	23.028	22.412
560	23.848	23.809	23.385	23.055	23.051	22.437	23.051	22.437

В первом случае

$$\text{var}\{a(0)\} = \text{var}\{\beta(0)\} = 9 \quad \text{для} \quad a(0)=15, \quad \beta(0)=18;$$

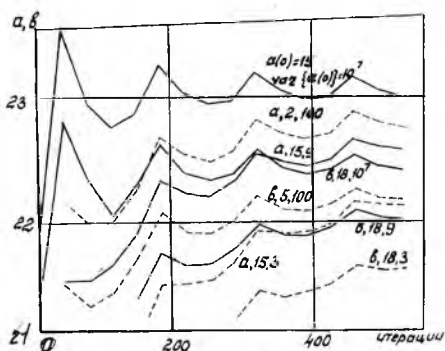
$$\text{var}\{a(0)\} = \text{var}\{\beta(0)\} = 100 \quad \text{для} \quad a(0)=5, \quad \beta(0)=2;$$

во втором для всех вариантов

$$\text{var}\{a(0)\} = \text{var}\{\beta(0)\} = 10^7.$$

При этом МАВ-оценки совпадают с оценками наименьших квадратов, полученными для соответствующей ДТКЗ (7) - (10) функции штрафа.

Рис.1 позволяет судить о наличии сходимости оценок и дает возможность оценить ее скорость в различных случаях. Видим, что скорость сходимости оценок возрастает с ростом априорной дисперсии.

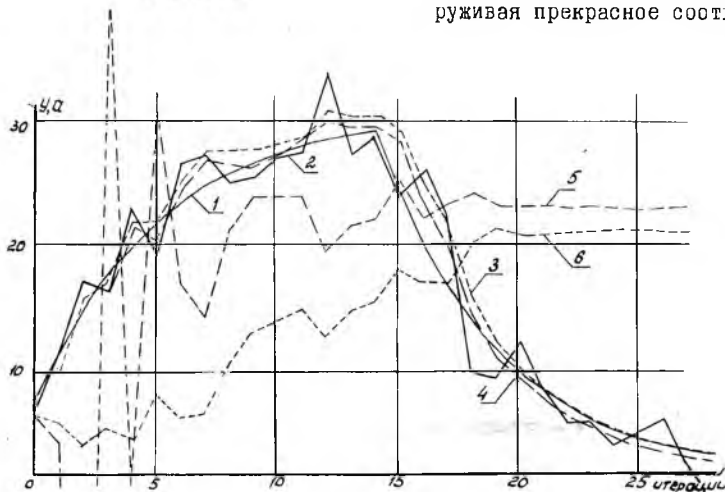


Р и с. 1

Сделаем еще ряд качественных выводов, экспериментально подтверждающих результаты теоретических исследований [5]:

изменчивость оценок уменьшается с ростом  $V\bar{n}_0$  (см. табл. I, 2, рис. 1);

увеличение мощности шума замедляет сходимость (см. табл. I, 2); при заданном уровне шума и больших априорных дисперсиях оценки параметров по-прежнему не зависят от начальных условий, обнаруживая прекрасное соответствие.



Р и с. 2

Исследовалась возможность настройки параметров многократным (здесь 16-кратным) использованием одной выборки наблюдений. Во всех случаях исходное требование постоянства параметров наилучшим образом выполняется на последней настройке.

Возможности метода инвариантного погружения наглядно иллюстрируем рис. 2 (1 - неискаженный выход; 2 - наблюдаемый выход; 3 - оценка выхода  $VAR$ ;  $\{a(0)\} = 100$ ;  $\{a(0)\} = 100$ ;  $\{a(0)\} = 10^7$ ; 4 - оценка выхода  $VAR$ ; б - а,  $VAR \{a(0)\}$

На рисунке - начальный этап - процедуры оценивания ( $s/w = 25$ ). Отметим, что оценки выхода  $y(t)$  отслеживаются гораздо лучше, чем  $a(t)$  и  $b(t)$ . Однако уже после 2I-го приближения МАВ-оценки становятся вполне приемлемыми, практически совпадая с истинными величинами.

Важной особенностью алгоритма фильтрации в методе инвариантного погружения является то, что для формирования оценки состояния в  $k+1$ -й точке фиксации используется измеренное значение выхода в этой же точке. Это позволяет отслеживать резкие изменения выхода без запаздывания на шаг дискретности.

**Квазилинеаризация.** Процедура оказалась нечувствительной к начальным условиям, во всяком случае, в области положительных значений параметров (табл.3, рис.3). Этот несколько неожиданный результат, видимо,

Т а б л и ц а 3

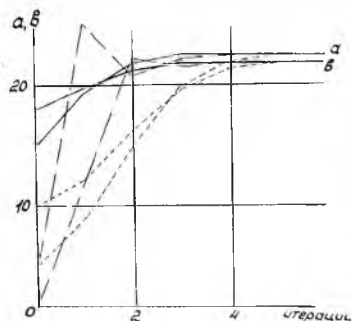
Итерация	$S/W = 25$						$S/W = 9$		
	$a$	$b$	$\sigma^2$	$a$	$b$	$\sigma^2$	$a$	$b$	$\sigma^2$
0	5.000	2.000	165.7	15.000	18.000	20.28	15.000	18.000	20.28
1	25.030	12.186	74.60	19.419	19.776	4.426	19.582	20.124	4.731
2	20.819	22.149	6.518	21.865	21.351	3.096	22.033	21.761	3.361
3	22.181	21.667	3.110	22.515	21.857	3.059	22.658	22.258	3.335
4	22.510	21.904	3.058	22.626	21.949	3.056	22.760	22.345	3.331
5	22.634	21.956	3.055	22.643	21.963	3.055	22.777	22.359	3.331
6	22.644	21.964	3.055	22.645	21.965	3.055	22.778	22.360	3.331
7	22.646	21.966	3.055	22.646	21.966	3.055	22.779	22.360	3.331
8	22.646	21.966	3.055	22.646	21.966	3.055	22.779	22.360	3.331

$\sigma^2$  - средний квадрат отклонения сглаженной оценки от теоретической кривой

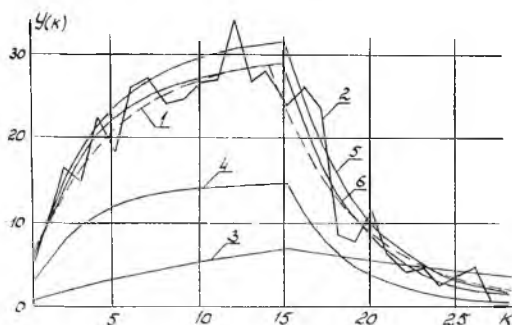
объясняется простотой исходной математической модели. Во всех рассмотренных случаях для выхода в оптимальную точку потребовалось одинаковое число итераций - 8 [следует из (19)]. Практически значения параметров перестают меняться уже на 5 - 6 итерации. Как и ожидалось [6], сходимость является квадратичной. Рис. 4 (1 - выход теоретический; 2-выход наблюдаемый; 3 - начальное приближение; 4-I-я итерация; 5-2-я итерация) иллюстрирует процесс последовательного приближения ( $S/W = 25$ ). Модель формирования оценки здесь иная, чем в инвариантном погружении - для получения сглаженной оценки  $\hat{x}^a(k+1)$  используется отсчет дискретной последовательности входа в предшествующий момент времени. Как ре-



зультат, имеем ошибку запаздывания, которая особенно велика при больших  $T$  (шаг дискретизации) и резких изменениях входного сигнала. Несмотря на качественные различия в формировании оценок, оба рассматриваемых метода дают близкие значения оцениваемых параметров.



Р и с. 3



Р и с. 4

Оценим это соответствие количественными характеристиками.

Введем нормализованную ошибку оценок параметров как функцию числа приближений:

$$\varepsilon(k) = \frac{\| \hat{a}(k) - \bar{a} \|^2}{\| \hat{a}(0) - \bar{a} \|^2};$$

$$\bar{a}^T = [22, 22].$$

Фиксируя  $\varepsilon$ , можно оценить скорость сходимости, обеспечиваемую алгоритмами, по равенству

$$c(k) = \varepsilon.$$

На рис. 5 (  $\square$  — квазилинеаризация;  $\Delta$  — инвариантное погружение;  $- S/N=9$ ;  $-- S/N=25$  ) представлены зависимости  $\varepsilon(k)$  для двух уровней шумов. Сопоставление одной итерации квазилинеаризации с числом шагов инвариантного погружения произведено в соответствии с [7], где для алгоритма квазилинеаризации получена рекуррентная запись в виде модифицированного расширенного фильтра Калмана.

Хотя показатель качества (19) уменьшается монотонно (см. табл. 3), налицо смещение оценок и связанный с этим перегиб кривых  $\varepsilon$ . Это объясняется тем, что при выбранном значении  $T=0,01$  в моменты переключений все же велика ошибка дискретной аппроксимации (она соизмерима со смещением и составляет около 5%). В целом же оценки следует признать хорошими. Алгоритмы обнаруживают разную чувствительность к шуму наблюдений. При сильных шумах предпочтительным в скорости сходимости

и точности оценок является алгоритм инвариантного погружения. Для слабых шумов некоторые преимущества дает квазилинеаризация.

## Л и т е р а т у р а

1. Т о в с т у х а Т.И.

Исследование дискретных квазиоптимальных алгоритмов идентификации. - "Автоматика и телемеханика", 1974, № 4.

2. Gustavsson J. Comparison

of different methods for identification of industrial processes. - *Automatica* 8, 1972.

3. Isezmann R., Bauz U., Bamberg W., Kneppo P., Siebert H.

Comparison of six on-line identification and parameter estimation methods. - *Automatica* 10, 1974.

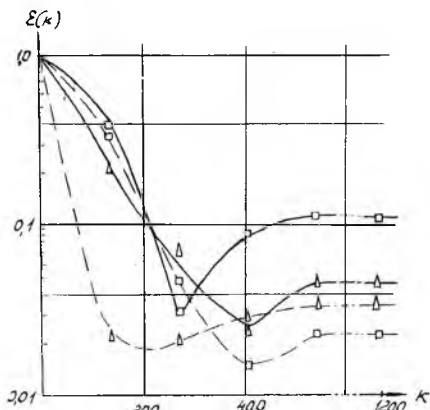
4. Sazidis G.N. Comparison of six on-line identifica-

tion algorithms. - *Automatica* 10, 1974.

5. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. М., "Наука", 1974.

6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., "Мир", 1968.

7. Chen. P.T.N. A recursive relationship for parameter estimation by the method of quasilinearisation and its connection with Kalman filtering in Conf. Rec 1970 JACC, June 1970.



Р и с. 5