УДК 517.09

С.В.Копейкин, Е.П.Курочкин, В.Е.Пашин

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ЛОКАЛЬНОЙ И ТЕРМИНАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Часто в практике задачу анализа точности можно решать в рамках корреляционной теории, т.е. на уровне двух первых моментов. Метод статистической линеаризации [1],[2] позволяет с известной степенью точности решать эту задачу. Однако он предполагает локальное осреднение по множеству реализаций случайной функции и, кроме того, оценка точности [2] получается очень громоздкой и сложной в технических приложениях. Поэтому было бы целесообразным получить более простые зависимости для оценки точности и разработать осреднение вне зависимости от формы фазовой траектории. Решение этих задач и посвящена данная работа.

<u>Локальный метод статистической линеаризации</u>. Если динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n, t), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

то можно построить алгоритм определения математических ожиданий и ковариационных моментов фазовых координат, который сводится к построению некоторой системы дифференциальных уравнений.

Разложим правые части системы (1) в многомерные ряды Тейлора в окрестности вектора математического ожидания фазовых координат и ограничимся только линейными членами и в соответствии с общей идеей статистической линеаризации [1],[2] зависимость для нелинейностей (1) получим в виде:

$$f_i \approx a_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,\Delta y_j\ ; \quad i=\overline{1,n}\ ; \qquad (2)$$
$$\Delta y_i = y_i - m_{y_i}\ ,$$

где a_i – статистическая характеристика нелинейности;

K_{ij} – статистические коэффициенты усиления (ковариации) по случайным центрированным фазовым координатам $f_i = f_i(m_{y_1}, m_{y_2}, \dots, m_{y_n}, t)$.

Усредним выражение (I) в каждый момент времени (локально) по множеству реализаций для заданного временного сечения, тогда с учетом (2) и свойства линейности операций математического ожидания и дифференцирования получим:

$$M\left(\frac{d}{dt}y_i\right) = \frac{dm_{y_i}}{dt} = \tilde{f}_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_j}M(\Delta y_i) = \tilde{f}_i\ . \qquad (3)$$

Для ковариационных моментов фазовых координат соответственно будем иметь:

$$cov\,(y_i y_j) = M\{(y_i - m_{y_i})(y_i - m_{y_j})\} = K_{ij}\ ;$$
$$\frac{dK_{ij}}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_s}K_{sj} + \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y_s}K_{si}\right). \qquad (4)$$

Таким образом, для определения вектора математического ожидания и ковариационных моментов имеем n уравнений (3) и, учитывая симметричность ковариационных матриц, $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений (4), общая система состоит из $n\frac{n+3}{2}$ уравнений при условии

$$K_{ij} = K_{ji}\ ; \quad m_{y_i}(0) = M[y_i(0)]\ ; \quad K_{ij}(0) = cov\,[y_i(0)\,y_j(0)].$$

Оценка точности локального метода статистической линеаризации. Учитывая, что линеаризованные уравнения дают лишь приближенную картину физического процесса и не описывают, например, резонансные явления, естественно желание получить оценку ошибки $\bar{\Delta}$, т.е. математическое ожидание ошибки $\bar{m}_\Delta$ и ковариационные моменты этой ошибки

$$\theta_{ij} = M\{(\Delta_i - m_{\Delta_i})(\Delta_j - m_{\Delta_j})\}\ ; \qquad (5)$$
$$\Psi_{ij} = M\{(\Delta_i - m_{\Delta_j})(y_i - m_{y_j})\}. \qquad i,j=\overline{1,n}\ ;$$

Представим правые части системы (I) в виде

$$f_i(y_1+\Delta_1,\ y_2+\Delta_2,\ \dots,\ y_n+\Delta_n,\ t)$$

и разложим в многомерные ряды Тейлора, ограничиваясь квадратичными членами. Тогда, введем обозначения

$$\Delta_S = m_{\Delta S} + \delta_S \; ; \qquad \tilde{f}_i = f_i(m_{y_1} + m_{\Delta 1}, \dots, m_{y_n} + m_{\Delta n}, t) \tag{6}$$

и, учитывая малость ошибок статистической линеаризации (2), после соответствующих преобразований получим:

$$\frac{dm_{\Delta i}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_s} m_{\Delta s} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_s \partial y_q} \left(K_{sq} + \theta_{sq} + \psi_{sq}\right), \tag{7}$$

где $K_{sq} = cov(y_s, y_q)$; $\theta_{sq} = cov(\Delta_s \Delta_q)$; $\psi_{sq} = cov(\Delta_s y_q)$; $j = \overline{1,n}$; $m_{\Delta j}(0) = 0$.

Учитывая свойство линейности операции математического ожидания и дифференцирования, произведя соответствующие преобразования с учетом (5), (6), (7), получим уравнения для определения θ_{ij} и ψ_{ij}:

$$\frac{d\theta_{ij}}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_s}\theta_{sj} + \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y_s}\theta_{si}\right) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial y_s \partial y_q}(\psi_{sj} - \theta_{sj}) m_{\Delta q} + \frac{\partial^2 \tilde{f}_j}{\partial y_s \partial y_q}(\psi_{si} + \theta_{si}) m_{\Delta q}\right\}; \tag{8}$$

$$\frac{d\psi_{ij}}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial y_s \partial y_q} m_{\Delta q} K_{sj} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_s}\psi_{sj} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{f}_j}{\partial y_s \partial y_q} m_{\Delta q}\psi_{sj} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y_s}\psi_{si}; \quad \theta_{ij}(0) = 0; \quad \psi_{ij}(0) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, чтобы оценить точность локального метода статистической линеаризации необходимо проинтегрировать систему, состоящую из $n(n+1)$ уравнений (8), (9).

<u>Терминальный метод статической линеаризации</u>. Этот метод [3] позволяет проводить аппроксимацию последующих состояний системы интегрально с учетом известных начальных условий, что делает погрешность метода не зависящей от интервала интегрирования, в отличие от метода локальной линеаризации, где эта зависимость весьма велика.

Допустим, что в момент времени t значения фазовых координат системы, описываемой уравнениями (I) известны

$$\bar{y}(t) = \bar{\Phi}(\bar{y}_0, t), \tag{10}$$

где $\bar{\Phi}(\bar{y}_0, t)$ – векторная функция начальных значений фазовых координат $\bar{y}_0 = \bar{y}(t=0)$ и времени t, т.е. $\bar{\Phi}(\bar{y}_0 t)$ является системой общих интегралов уравнений (I):

$$\Phi_j(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n_0}, t) = \int_0^t f_j(y_1, y_2, \dots, y_n, t)\, dt + y_{j0}, \; (j = \overline{1,n}). \tag{11}$$

Учитывая допущение (11), разложим функцию $\bar{\Phi}(\bar{y}_0, t)$ в многомерные ряды Тейлора и ограничимся линейными членами, тогда вариация фазовых координат в момент времени t, $\delta y_j(t), (j=\overline{1,n})$ обусловленная вариациями начальных значений фазовых координат $\delta y_{0j}, (j=\overline{1,n})$ в момент времени t_0, в матричной форме будет иметь вид:

$$\delta\bar{y}(t) = Q\delta\bar{y}_0, \qquad (12)$$

где $\{Q\}_{ij} = q_{ij}, (i,j=\overline{1,n})$ - матрица размерности ($n\,n$).

Матрица Q аналогична матрице чувствительности Якоби [4], [5], значения ее элементов определяются на номинальной фазовой траектории.

Учитывая независимость смешанных производных от порядка дифференцирования [4], для элементов матрицы Q получим:

$$\frac{dq_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{j0}} = \frac{\partial}{\partial y_{j0}}\frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_s(t)}q_{sj};\ (i,j=\overline{1,n}); \qquad (13)$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j \end{cases}$$

частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_s}$ вычисляются для номинальной фазовой траектории и могут быть определены в процессе интегрирования [6]. С учетом свойств математического ожидания [7] вероятностные числовые характеристики вариаций фазовых координат в момент времени t имеют вид:

$$M[\delta\bar{y}(t)] = QM[\delta\bar{y}_0]; \qquad (14)$$

$$K_y = M\{[\delta\bar{y}(t) - M[\delta\bar{y}(t)]][\delta\bar{y}(t) - M[\delta\bar{y}(t)]]'\} = QK_{y_0}Q', \qquad (15)$$

где $K_{y_0} = M[\Delta\bar{y}(0), \Delta\bar{y}'(0)]$; $\Delta\bar{y}_0 = \bar{y}(0) - M[\bar{y}(0)]$;

K_{y_0} - ковариационная матрица неопределенности значений фазовых координат в момент времени $t=0$, т.е. для нахождения вероятностных характеристик необходимо решить $n(n+1)$ уравнений [n уравнений (1) с начальными условиями $y_i(0) = M(y_{i0})$ и n^2 уравнений (13)].

<u>Оценка точности терминального метода статистической линеаризации</u> может быть получена, если в разложении (12) удержать члены более высокого порядка. В первом приближении получим, что ошибка определения вариаций фазовых координат $\bar{\Delta}y$ определяется из соотношения

$$\Delta y_j(t)=\delta y_j(t)-\delta y_{лин}(t)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} r_{jsp}\,\delta y_{os}\,\delta y_{op}, \quad (j=\overline{1,n}), \tag{16}$$

где $r_{jsp}\ (s,p=\overline{1,n})$ – коэффициенты матрицы чувствительности второго порядка.

С учетом (16) выражения для математического ожидания и ковариационного момента ошибки терминального метода линеаризации примут вид:

$$M[\Delta y_j(t)]=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} r_{jsp} K_{sp}, \tag{17}$$

где $K_{sp}=cov(y_{os}\,y_{op})=M(\delta y_{os}\,\delta y_{op})$;

$$K_{\Delta y_{ij}}=\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{isp}\, r_{j\ell m}\, M(\delta y_{os}\,\delta y_{op}\,\delta y_{o\ell}\,\delta y_{om})- \tag{18}$$

$$-\frac{1}{4}\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} r_{jsp}K_{sp}\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{i\ell m}K_{\ell m}\Big).$$

Для оценки погрешности терминального метода надо решить n^3 уравнений.

Таким образом, получена оценка точности локального метода статистической линеаризации в простой форме и разработан терминальный метод статистической линеаризации.

Литература

1. Казаков И.Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., ФМ, 1962.

2. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М., "Наука", 1975.

3. Куликовский К.Л., Курочкин Е.П., Копейкин С.В. Анализ погрешностей информационно-измерительных систем с функционально связанными каналами. – В сб.: Информационно-измерительные системы. Куйбышев, 1974.

4. Курс высшей математики. Т. I – 5. М., ФМ, 1973.

5. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Высшая школа", 1963.

6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З Численные методы анализа. М., ФМ, 1963.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., ФМ, 1962.