УДК 629.13

В.М.Белоконов, Л.В.Морозов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассматривается управляемое движение материальной точки (МТ) в центральном поле между двумя точками пространства. Предполагается, что кроме силы тяготения, на МТ действует активная сила $\vec{F}$, которая раскладывается на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Первая направляется по вектору скорости движения МТ $\vec{V}$, вторая - плоскости перпендикулярной вектору скорости. Управление движением МТ происходит за счет изменения ориентации составляющей $\vec{F}_2$ относительно плоскости, образованной радиусом-вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{V}$.

Движение МТ рассматривается в декартовой инерциальной системе координат $0_1x_1x_2x_3$ с началом, совпадающим с притягивающим центром. Ось 0_1x_1 направлена в начальную точку движения по радиусу-вектору $\vec{r}_0$, ось 0_1x_2 лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{V}_0$, ось 0_1x_3 дополняет систему до правой (рис. I).

Положение вектора $\vec{r}$ в системе $0_1x_1x_2x_3$ будем задавать углами λ_1 и λ_2 (см.рис.I), а вектора $\vec{V}$ - углами θ и χ, где θ - угол между вектором $\vec{V}$ и плоскостью местного горизонта; χ - угол между проекцией вектора $\vec{V}$ на плоскость местного горизонта и линией пересечения плоскости, проходящей через вектор $\vec{r}$ под углом λ_1 и координатной плоскости $0_1x_1x_2$, с плоскостью местного горизонта.

В траекторной системе координат уравнения движения материальной точки можно записать в виде [I]:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot V = F_1 - g\sin\theta;\\
&\dot\theta = \frac{1}{V}\left[F_2\cos u(t) - g\cos\theta + \frac{V^2\cos\theta}{r}\right];\\
&\dot\chi = -\frac{1}{V\cos\theta}\left[F_2\sin u(t) + \frac{V^2\cos^2\theta}{r}\cos\chi\, tg\lambda_1\right];\\
&\dot r = V\sin\theta;\\
&\dot\lambda_1 = \frac{V\cos\theta}{r}\sin\chi;\\
&\dot\lambda_2 = \frac{V\cos\theta}{r}\frac{\cos\chi}{\cos\lambda_1},
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

где g – ускорение силы тяжести; $u(t)$ – угол между вектором $\vec F_2$ и плоскостью, образованной векторами $\vec r(t)$ и $\vec V(t)$; t – текущее время.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть под воздействием закона управления $u_0 = u_0(t)$ МТ, движение которой описывается системой уравнений (I), перемещается в инерциальном пространстве $O_1x_1x_2x_3$ из точки $O(\vec r_0)$ в точку $K(\vec r_K)$. Требуется преобразовать закон управления $u_0(t)$ таким образом, чтобы появилась возможность перемещения МТ из начальной точки пространства $O(\vec r_0)$ в заранее заданную $C(\vec r_C)$, лежащую на сфере радиуса $r_C = r_K$.

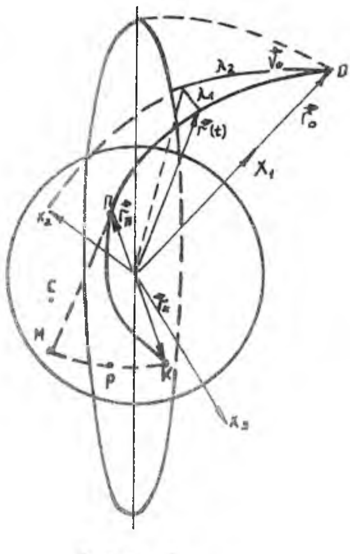


Рис. I

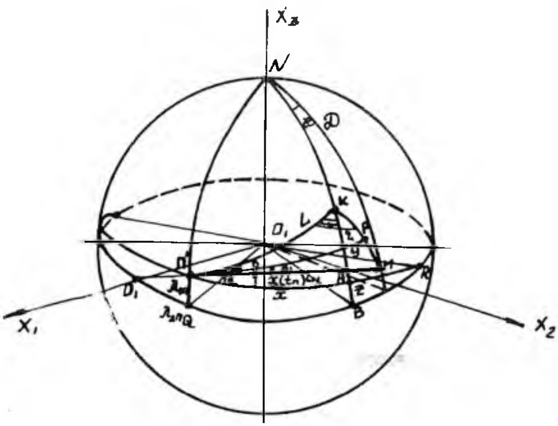
В данной работе предполагается следующее решение поставленной задачи.

Если в некоторый промежуточный момент времени движения между точками O и K $t_П \in [t_0, t_K]$ изменить знак управления $u_0(t)$ на обратный, то двигаясь с управлением

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t_0 \le t \le t_П;\\ -u_0(t) & t_П < t \le t_K. \end{cases} \qquad (2)$$

МТ попадает в некоторую точку $M(\vec{r}_M)$ (см.рис.I) сферы радиуса r_k. Причем, точка M будет симметрична точке K относительно плоскости, касательной к траектории в момент времени t_n и проходящей через вектор $\vec{r}(t_n)$. Касательная плоскость будет образована векторами $\vec{r}(t_n)$ и $\vec{V}(t_n)$. Симметричность точек M и K объясняется тем, что при изменении знака управления $u_0(t)$ производные $\dot{x}$ и $\dot{\lambda}_1$ меняют знак на обратный, остальные же производные $\dot{V}$, $\dot{\theta}$, $\dot{r}$, $\dot{\lambda}_2$ сохраняют прежний (I). Таким образом, для попадания в заданную точку $C(\vec{r}_c)$ необходимо подобрать соответствующее время t_n^* переключения знака закона управления $u_0(t)$.

Подбор времени t_n^* легко производить с помощью следующего аналитического метода прогноза координат точки пересечения сферы радиуса r_k и траектории, соответствующей движению с управлением (2).



Р и с. 2

Рассмотрим сферу радиуса r_k (рис.2). Пусть O', Π' - проекции точек O и Π траектории на эту сферу. Соединим точки Π', K и M дугами большого круга $\cup\,\Pi'K = L$, $\cup\,KM = S$, $\cup\,\Pi'M = L_1$. Допустим, что в некоторый момент времени переключения управления $t_n \in [t_0, t_k]$ известны координаты вектора $\vec{r}(t_n)$: $\lambda_{1n} = \lambda_1(t_n)$, $\lambda_{2n} = \lambda_2(t_n)$ и одна координата вектора $\vec{V}(t_n)$: $x_n = x(t_n)$.

Известны также координаты вектора $\vec{r}(t_K)$: $\lambda_{1K}=\lambda_1(t_K)$, $\lambda_{2K}=\lambda_2(t_K)$. Проведем через ось O_1x_3 и точки $П'$, K , M три плоскости, а через точку $П'$ еще одну плоскость под углом $\lambda_{1П}$ к координатной плоскости $O_1x_1x_2$. Обозначим через $\cup П'P$ след касательной к траектории плоскости, образованной векторами $\vec{r}(t_П)$ и $\vec{V}(t_П)$ на сфере радиуса r_K . Из сферических треугольников $П'KM$, $П'KA$ и $П'RQ$ найдем угловые длины дуг L, x, z и угол α :

$$L=\arccos\left[\sin\lambda_{1П}\sin\lambda_{1K}+\cos\lambda_{1П}\cos\lambda_{1K}\cos(\lambda_{2K}-\lambda_{2П})\right];$$

$$z=\operatorname{arctg}\left[\cos(\lambda_{2K}-\lambda_{2П})\operatorname{tg}\lambda_{1П}\right];$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{ctg}(\lambda_{2K}-\lambda_{2П})}{\cos\lambda_{1П}}\right];$$

$$\alpha=\operatorname{sign}(\lambda_{1K}-z)\arccos\left[\frac{(\cos|\lambda_{1K}-z|-\cos L)\cos x}{\sin L\sin x}\right].$$

Так как точки M и K симметричны относительно касательной плоскости, то они симметричны и относительно ее следа $\cup П'P$. Это означает, что треугольник $П'KM$ равнобедренный $(L=L_1)$ и дуги $\cup П'P$ и $\cup KM$ ортогональны. Можно определить угол при вершине этого треугольника

$$\beta=2(\alpha-x_П).$$

Из треугольников $П'KM$ и $П'KA$ находится угловая длина дуги $\cup KM=S$ и углы γ, η, ω :

$$S=\arccos(\cos^2 L+\sin^2 L\cos\beta);$$

$$\eta=\arcsin\left(\frac{\sin L\sin\beta}{\sin S}\right);$$

$$\gamma=\arccos\left[\frac{\cos x-\cos L\cos(\lambda_{1K}-z)}{\sin L\sin|\lambda_{1K}-z|}\right];$$

$$\omega=\eta-\gamma.$$

Рассмотрев треугольник NMK , можно определить длину дуги $\cup NM=D$ и угол x :

$$\cos D=\sin\lambda_{1K}\cos S+\cos\lambda_{1K}\sin S\,q;$$

$$D=\arcsin\sqrt{1-\cos^2 D},$$

где

$$q = \begin{cases} -\operatorname{sign} x_n \cos\omega & |\alpha| > |x_n|; \\ -\operatorname{sign} x_n \cos(\gamma+\eta) & |\alpha| \leqslant |x_n|; \end{cases}$$

$$\text{æ} = \operatorname{sign}(|\alpha| - |x_n|) \arccos\left[\frac{\cos S - \sin\lambda_{1K}\cos D}{\cos\lambda_{1K}\sin D}\right].$$

Теперь можно определить координаты вектора $\vec{r}_M(t_K)$:

$$\lambda_{1M} = \frac{\pi}{2} - D;$$

$$\lambda_{2M} = \lambda_{2K} - \text{æ} .$$

Таким образом, предлагаемый метод прогноза позволяет определить координаты точки пересечения траектории с поверхностью сферы радиуса r_K при движении с управлением (2), если известны координаты точки пересечения K, полученной при движении по траектории с управлением $u_0(t)$.

Метод прогноза можно использовать при определении времени переключения t_n^* для попадания в заданную точку. С этой целью необходимо на каждом шаге численного интегрирования системы (I) от момента времени t_0 до t_K определять координату λ_{1M} точки M и использовать ее для формирования функции выхода из алгоритма численного интегрирования. Время, при достижении которого происходит прекращение интегрирования, соответствует моменту переключения t_n^*. Добившись совпадения координат λ_{1M} и λ_{1C} точек M и C, необходимо сместить точку $O(\vec{r}_0)$ в плоскости $O_1x_1x_2$ на угол $\Delta\lambda_2 = \lambda_{2M} - \lambda_{2C}$, поскольку алгоритм не обеспечивает совпадение координат λ_2.

Применение описанного метода прогноза позволяет формировать закон управления $u(t)$ таким образом, что траектория движения МТ будет проходить через заданную точку. Формирование закона управления $u(t)$ проводится за время, не превышающее длительности одного интегрирования системы уравнений движения (I) численным методом на отрезке времени $[t_0, t_K]$.

Литература

I. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М., "Машиностроение", 1969.