

На правах рукописи

Варданян Седрак Ваникович

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ СОСТАВНЫХ ТЕЛ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2005

Работа выполнена в Институте механики Национальной Академии Наук Армении и ГОУ ВПО «Чувацкий государственный педагогический университет» им. И. Я. Яковлева

Научный руководитель:

академик НАН Армении, доктор физико-математических наук,
профессор Задоян Месроп Арамович

Научный консультант:

заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук,
профессор Ивлев Дюис Данилович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент

Максимова Людмила Анатольевна,

заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор

Синицкий Юрий Эдуардович

Ведущая организация:

Воронежский государственный университет

Защита состоится «14» мая 2005г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.218.06 при ГОУ ВПО «Самарский государственный университет» по адресу: 443011, г. Самара ул. Академика Павлова, 1, зал заседаний

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Самарского государственного университета

Автореферат разослан «13» мая 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глуценков В.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Современная техника предъявляет повышенные требования к прочностным свойствам машин, их деталей, а также различных конструкций и сооружений, уменьшению их веса, объема и размеров, что приводит к необходимости использования неоднородных композитных материалов. Нахождение критериев, позволяющих определить предельные прочностные характеристики элементов конструкций, инженерных сооружений является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Проблемы прочности в конструкциях часто сводятся к выяснению характера местного напряженного состояния у вершин стыков составляющих частей. Исследования, проведенные К.С. Чобаняном в этом направлении, привели к выявлению эффекта малонапряженности. Отмеченное явление для материалов со степенными упрочнениями исследовано М.А. Задояном. Результаты этих работ дают возможность варьированием физических и геометрических параметров составляющих частей конструкции достичь наилучшей прочности данной конструкции. Проблемам прочности соединений состоящих из нелинейных материалов посвящены работы Г.И. Черепанова, Дж. Р. Райса и др.

Вопросам и задачам прочности соединений посвящены работы Б.Л. Абрамяна, О.К. Аксентяна, С.А. Амбарцумяна, Б.Д. Аннина, Н.Х. Арутюняна, В.С. Бартона, С.М. Белоносова, М.В. Белубекяна, Д.Б. Боджи, К. Васидзу, М.Л. Вильямса, Б.Г. Галеркина, Ю.А. Демьянова, Ду-Цин-Хуа, М.А. Задояна, Д.Д. Ивлева, Г.Р. Ирвина, А. Карпинтери, А. Коттрелья, Е.В. Ломакина, О.Н. Лущика, Л. А. Максимовой, С.Г. Михлина, В.М. Морозова, Н.И. Мухелишвили, А. Надаи, Г. Нейбера, Е.О. Орована, Н.Ж. Пагано, Б.Л. Пелеха, Р. Петерсона, Н. Пуйно, Ю.Н. Работнова, Дж. Райса, Х.А.Рахматулина, Э. Дж. Рейснера, Г.Н. Савина, Г.С. Си, Ю. Э. Сеницкого, Г.Б. Синклайра, В.В. Соколовского, С.П. Тимошенко, В.И. Феодосьева, Г.М. Хатиашвили, Р.Ж. Хартранфта, Г.П. Черепанова, К.С. Чобаняна, А.Р. Зака и ряда других отечественных и зарубежных ученых.

Для клиновидных составных тел со степенным упрочнением М.А. Задоян сформулировал соотношения, определяющие характер местного напряженного состояния в окрестности угловой точки выходящих или входящих углов рассматриваемой конструкции. Им исследован продольный сдвиг, плоская деформация, пространственное деформирование составного клиновидного тела. Развита численные методы для решения такого рода задач.

Точные и приближенные аналитические решения, получаемые в рамках теории упрочняющихся тел, широко используются при проектировании различных типов конструкций. Актуальной является задача учета свойств неоднородности материала, а также развитие методов решение подобных задач.

Неоднородность упрочняющихся материалов может быть вызвана рядом причин. Неравномерность свойств материалов может возникнуть в результате деформирования упрочняющегося материалов при прокатке, штамповке, волочении и т.п. К неоднородному распределению упрочняющихся свойств может привести воздействие различных типов динамических нагрузок, оно может воз-

никнуть, например, в результате поверхностной обработки изделия вследствие закалки и т.п. Упрочняющая неоднородность может быть вызвана воздействием радиационного облучения, а также в результате воздействия различных температурных градиентов, возникающих при литье и т.д.

В данной работе для материалов со степенным упрочнением считается, что неоднородность характеризуется зависимостью модуля упругости от угла раствора упрочняющегося клинообразного тела. Уравнения, характеризующие предельное напряженное состояние, соответствующее неоднородному случаю, можно получить из исходных уравнений, с самого начала считая, что в степенном законе упрочнения $\sigma_0 = k\epsilon_0^m$, модуль упругости зависит от угла раствора $k = k(\vartheta)$.

Целью работы является исследование предельного напряженного состояния в неоднородных соединениях в рамках уточненной и классической теорий изгиба плит Рейснера и Кирхгофа; исследование предельного напряженного состояния в плоской задаче с учетом конечных деформаций; исследование прочности соединения составных, неоднородных конических труб.

На защиту выносятся следующие результаты:

- Построение зон сильной и нулевой (малонапряженной) концентрационных состояний в окрестности угловой точки составных, неоднородных (в зависимости от углов раствора составляющих частей и от дозы облучения) клиновидных плит в рамках уточненной и классической теорий изгиба плит Рейснера и Кирхгофа.
- Построение кривых конечных напряжений, которые разделяют области сильной концентрации и области малонапряженности, с учетом конечных деформаций.
- Соотношения, которые определяют экстремальную наружную конусообразность внутренней трубы (или экстремальную внутреннюю конусообразность наружной трубы), обеспечивающую наилучшую прочность для неоднородных составных конических труб.

Научная новизна. Получены характеристические соотношения для напряженного состояния в окрестности угловой точки неоднородного, физически и геометрически нелинейного клиновидного тела. Получены соотношения, определяющие оптимальную прочность неоднородных, составных конических труб.

Достоверность результатов обеспечивается использованием фундаментальных представлений теории прочности и разрушения, математических методов исследования, непротиворечивостью и сводимостью результатов данной работы к результатам других авторов.

Практическая ценность работы. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах предельного состояния упрочняющихся неоднородных сред, для более полного исследования ресурсов прочности и, следовательно, более рационального проектирования сооружений и машин.

Апробация работы. Отдельные результаты и работа в целом докладывались:

- на семинарах «Прочности соединения и теории пластичности» (Институт Механики НАН Армении, Ереван, 2003-2005);
- на семинарах по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, ЧГПУ, 2005);
- на международной школе-семинаре «Современные проблемы механики и прикладной математики» посвященной 75-летию профессора Д.Д. Ивлева, Воронеж 2005;
- на V Российской конференции с международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого тела», Саратов 2005;
- на семинаре кафедры Механика сплошной среды Самарского государственного университета. Самара, 2005 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 7 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы: 122 страницы, в том числе 80 рисунков и графиков, 2 таблицы, список литературы содержит 129 наименований.

Благодарности. Автор искренне признателен научному руководителю академику НАН Армении Месропу Арамовичу Задоян и научному консультанту заслуженному деятелю науки РФ, профессору Дюису Даниловичу Ивлеву за внимательное отношение к представленной работе.

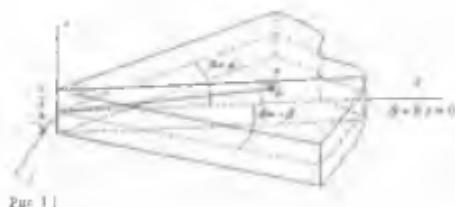
Основное содержание работы

Первая глава посвящена выводу характеристических соотношений, определяющих предельное напряженное состояние, в окрестности угловой точки клиновидных составных плит исходя из уточненной и классической теории изгиба плит Рейснера и Кирхгофа, где учитывается неоднородность материалов тела произвольного вида, зависящая от координат точек пространства. Используются численные методы расчета для определения кривых конечных напряжений в полярной системе координат.

В первом параграфе приводятся характеристические соотношения для определения предельного напряженного состояния в окрестности угловой точки клиновидной составной плиты со степенным упрочнением исходя из уточненной теории изгиба плит Рейснера, с учетом неоднородности материалов.

Предполагается, что в степенном законе упрочнении $\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$ модуль упругости зависит от угла раствора $k = k(\vartheta)$ клиновидного тела.

Исходя из деформационной теории Генки, зависимость между деформациями и напряжениями имеет вид:



$$\begin{aligned} \sigma_r &= 4k(\vartheta)\varepsilon_0^{m-1}\left(\varepsilon_r + \frac{1}{2}\varepsilon_\vartheta\right), \quad \tau_{r\vartheta} = 2k(\vartheta)\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{r\vartheta}, \\ \sigma_\vartheta &= 4k(\vartheta)\varepsilon_0^{m-1}\left(\varepsilon_\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon_r\right), \quad \tau_{\vartheta r} = 2k(\vartheta)\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{\vartheta r}, \\ \sigma_z &\approx 0, \quad \tau_{rz} = 2k(\vartheta)\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{rz}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Учитывая поперечные сдвиги по Рейснеру, перемещения выражаются следующим образом:

$$u = zu_1(r, \vartheta), \quad v = zv_1(r, \vartheta), \quad w = w(r, \vartheta). \quad (1.2)$$

Интенсивность деформации выражается в форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \left(4z^2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial r} \left(\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \right) + \left(\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + u_1 \right)^2 + \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial r} \left(\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \right) + \left(\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2}, \\ \gamma &= \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r} + u_1 \right)^2 + \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right)^2}, \quad q = \frac{\gamma}{\omega}. \end{aligned}$$

$$J = \int_0^h \frac{t^2 dt}{\left(\sqrt{t^2 + q^2} \right)^{1-m}}, \quad J_0 = \frac{\omega^{m-1}}{8} J, \quad (1.4)$$

$$I = \int_0^h \frac{dt}{\left(\sqrt{t^2 + q^2} \right)^{1-m}}, \quad I_0 = \frac{\omega^{m-1}}{2} I.$$

Тогда крутящие, изгибающие моменты и перерезывающие моменты будут иметь вид:

$$\begin{aligned} M_r &= k(\vartheta)J\omega^{m-1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} \right) \right], \\ M_\vartheta &= k(\vartheta)J\omega^{m-1} \left[\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{r\vartheta} &= \frac{k(\vartheta)I\omega^{m-1}}{4} \left[\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right], \\
 Q_r &= k(\vartheta)I\omega^{m-1} \left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\
 Q_\vartheta &= k(\vartheta)I\omega^{m-1} \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Функции $u_1(r, \vartheta)$, $v_1(r, \vartheta)$, $w(r, \vartheta)$ представляются в виде:

$$u_1 = r^\lambda \varphi(\vartheta, \lambda), \quad v_1 = r^\lambda \psi(\vartheta, \lambda), \quad w = r^{\lambda+1} f(\vartheta, \lambda), \tag{1.6}$$

где $\varphi(\vartheta, \lambda)$, $\psi(\vartheta, \lambda)$, $f(\vartheta, \lambda)$ новые искомые функции, а λ искомый параметр, играющий роль собственного значения уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{M_r - M_\vartheta}{r} + Q_r &= 0, \\
 \frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r} M_{r\vartheta} + Q_\vartheta &= 0, \\
 \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} Q_r &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

с соответствующими гранично-контактными условиями, характеризующий предельное напряженное состояние в окрестности угловой точки составной клинообразной плиты. $\lambda > 1$ соответствует малонапряженному состоянию, $\lambda < 1$ — сильно концентрированному состоянию, $\lambda = 1$ — предельно-напряженному состоянию, которое разделяет области сильной концентрации и малонапряженности.

В случае экспоненциальной неоднородности (т.е. $k(\vartheta) = e^{\mu\vartheta}$) для несоставной плиты с жестко заделанными краями, можно получить зависимость параметра λ от угла раствора (рис. 1.2).

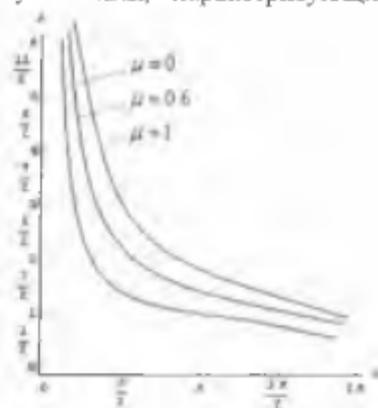
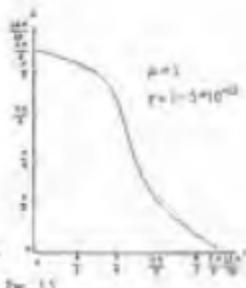
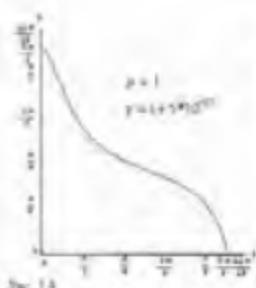
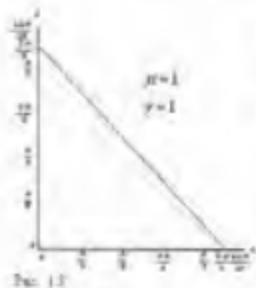


Рис. 1.2

Для различных гранично-контактных условий плиты получены кривые конечных напряжений, т.е. кривые, которые разделяют области сильной концентрации и малонапряженности. На рис. 1.3-1.5 показаны случаи, когда оба края составной плиты свободно оперты.

Из приведенных графиков видно, что зоны малонапряженности и сильной концентрации неоднородных материалов очень чувствительны (т.е. при малом изменении упругих характеристик тел они существенно меняются). Приведенные здесь графики на рис. 1.2-1.5 соответствуют случаю $m = 1$.



Во втором параграфе рассматривается напряженное состояние в окрестности угловой точки неоднородного клиновидного тела исходя из классической теории изгиба плит Кирхгофа. В пространстве физических и геометрических параметров построены предельные поверхности, разделяющие зоны малонапряженности и сильной концентрации (рис. 1.6, 1.7). Полученные графики соответствуют случаю, когда $h_1 = h_2 = 9$ и $h_1 = h_2 = 5$ (h_1, h_2 коэффициенты экспоненциальной неоднородности для обоих материалов, соответственно). На рис. 1.6 в 1.7 видно, что при такой постановке задачи напряженное состояние в окрестности отмеченной точки ведет себя также как в окрестности несоставной плиты.

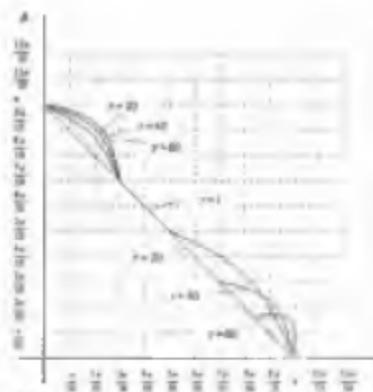


Fig. 16

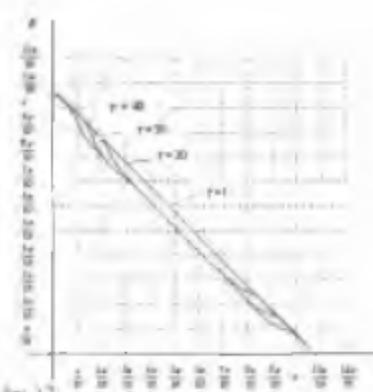


Fig. 17

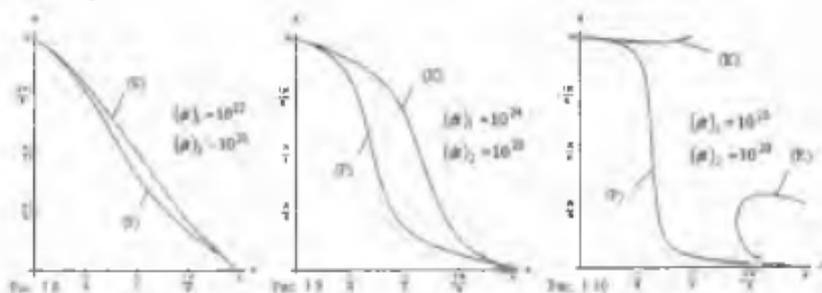
Третий параграф посвящен исследованию напряженного состояния в окрестности угловой точки нейтронно-облученной составной плиты. Приводятся характеристические соотношения, определяющие влияние нейтронного облучения на механических свойствах материалов плит.

В четвертом параграфе, исходя из уточненной и классической теории изгиба плит Рейснера и Кирхгофа, приводятся решения разрешающих уравнений для произвольного вида облучения.

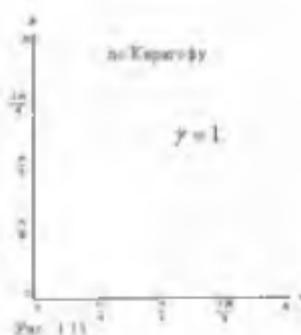
В пятом параграфе приводятся разрешающие характеристические соотношения для составной плиты, изготовленной из коррозионно-стойкой стали типа 304 ($E_0=1.77 \times 10^5$ МПа) при воздействиях различных доз облучения.

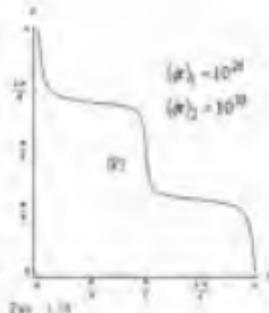
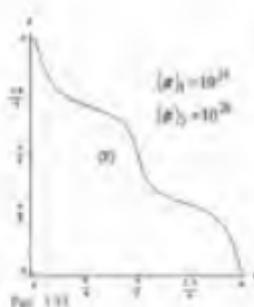
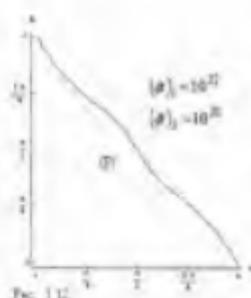
В шестом параграфе исследуется напряженное состояние в окрестности угловой точки клиновидной плиты, изготовленной из коррозионно-стойкой стали типа 304 ($E_0=1.77 \times 10^5$ МПа), при воздействиях различных доз облучения. Рассматривается случай, когда внешние края плиты свободно оперты. Исследование ведется по уточненной и классической теории. Для обоих случаев построены кривые конечных напряжений.

В седьмом параграфе исследуется задача локального напряженного состояния, аналогичная задаче шестого параграфа, но с жестко защемленными граничными условиями. Показано, что при облучении обоих материалов составной плиты разными дозами, существует предел разности доз этих облучений, при превышении которого классическая теория изгиба плит не дает возможность построить зоны малонапряженности и сильной концентрации. С помощью уточненной теории отмеченные зоны определяются соответствующим образом (рис. 1.8-1.10).



В восьмом параграфе рассматривается аналогичная параграфам 6,7 задача со свободными граничными условиями. Показано, что в этом случае по теории Кирхгофа при любых разностях доз облучения не удается построить области сильной концентрации и малонапряженности. Следовательно, возникает необходимость применять уточненную теорию, с помощью которой получены соответствующие области (рис. 1.11-1.14).





Девятый параграф посвящен к анализу полученных результатов. Приводятся краткие выводы результатов, полученных в предыдущих параграфах первой главы.

Вторая глава посвящена исследованию напряженного состояния в окрестности угловой точки клиновидного составного тела в плоской постановке задачи с учетом геометрической нелинейности. Считается, что составляющие части рассматриваемого тела имеют степенное упрочнение.

В первом параграфе находятся характеристические соотношения, определяющие предельное напряженное состояние в окрестности угловой точки клиновидной составной плиты в плоской задаче с учетом геометрической нелинейности.

Уравнения равновесия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{S_r(r, \theta) - S_\theta(r, \theta)}{r} &= 0, \\ \frac{\partial S_{r\theta}(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{S_{r\theta}(r, \theta) + S_{\theta r}(r, \theta)}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $S_r(r, \theta)$, $S_\theta(r, \theta)$, $S_{r\theta}(r, \theta)$, $S_{\theta r}(r, \theta)$ выражаются с помощью компонентов перемещений $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ и обобщенных напряжений $\sigma_r^*(r, \theta)$, $\sigma_\theta^*(r, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^*(r, \theta)$, $\sigma_{\theta r}^*(r, \theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_r(r, \theta) &= \sigma_r^*(r, \theta) \left(1 + \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{v(r, \theta)}{r} \right), \\ S_\theta(r, \theta) &= \sigma_\theta^*(r, \theta) \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} + \sigma_\theta^*(r, \theta) \left(1 + \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} \right), \\ S_{r\theta}(r, \theta) &= \sigma_r^*(r, \theta) \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} + \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) \left(1 + \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} \right), \\ S_{\theta r}(r, \theta) &= \sigma_\theta^*(r, \theta) \left(1 + \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \sigma_\theta^*(r, \theta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{v(r, \theta)}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обобщенные напряжения выражаются через обычные напряжения следующим образом:

$$\sigma_r^* = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon_\theta}{1+2\varepsilon_r}} \sigma_r, \quad \sigma_\theta^* = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_\theta}} \sigma_\theta, \quad \sigma_{r\theta}^* = \sigma_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta r}^* = \sigma_{\theta r}. \quad (2.3)$$

Конечные деформации, зависящие от перемещений, имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r, \theta) &= \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_\theta(r, \theta) &= \frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{v(r, \theta)}{r} \right)^2 \right], \\ 2\varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} - \frac{v(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{v(r, \theta)}{r} \right) + \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \left(\frac{u(r, \theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

По деформационной теории Генки в условии несжимаемости, соотношение между обобщенными напряжениями и деформациями можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, \theta) &= 2k\varepsilon_0^{m-1}(r, \theta)\varepsilon_r(r, \theta) \\ \sigma_\theta^*(r, \theta) &= 2k\varepsilon_0^{m-1}(r, \theta)\varepsilon_\theta(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \sigma_{\theta r}^*(r, \theta) = 2k\varepsilon_0^{m-1}(r, \theta)\varepsilon_{r\theta}(r, \theta), \\ \varepsilon_0(r, \theta) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2(r, \theta) + \varepsilon_\theta^2(r, \theta) + 3\varepsilon_{r\theta}^2(r, \theta) - \varepsilon_r(r, \theta)\varepsilon_\theta(r, \theta)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_r(r, \theta) + \varepsilon_\theta(r, \theta))^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_r(r, \theta) - \varepsilon_\theta(r, \theta))^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\bar{\varepsilon}_0(r, \theta)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С помощью полученных уравнений исследовано предельное напряженное состояние в окрестности отмеченной точки.

Второй параграф посвящен построению гиперповерхности конечных напряжений. Перемещения выбираются следующим образом:

$$u(r, \theta) = r f(\theta), \quad v(r, \theta) = r \psi(\theta), \quad (2.6)$$

соответственно уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned}
& (m-1)\bar{\varepsilon}_0'(\theta)(\varepsilon_{r\theta}(\theta)(f(\theta)+1) + \varepsilon_\theta(\theta)(f'(\theta) - \psi(\theta))) + \\
& + 2\bar{\varepsilon}_0(\theta)(\varepsilon_{r\theta}'(\theta)(f(\theta)+1) + 2\varepsilon_{r\theta}(\theta)(f'(\theta) - \psi(\theta)) + \\
& + \varepsilon_\theta'(\theta)(f'(\theta) - \psi(\theta)) + \varepsilon_\theta(\theta)f''(\theta) + \\
& + 2\frac{\varepsilon_{r\theta}^2(\theta) - \varepsilon_\theta^2(\theta) - \varepsilon_\theta(\theta)}{1 + 2\varepsilon_\theta(\theta)}(f(\theta)+1) = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& (m-1)\bar{\varepsilon}_0'(\theta)(\varepsilon_{r\theta}(\theta)\psi(\theta) + \varepsilon_\theta(\theta)(f(\theta) + \psi'(\theta) + 1)) + \\
& + 2\bar{\varepsilon}_0(\theta)(\varepsilon_{r\theta}'(\theta)\psi(\theta) + 2\varepsilon_{r\theta}(\theta)(\psi'(\theta) + f(\theta) + 1) + \\
& + \varepsilon_\theta'(\theta)(f(\theta) + \psi'(\theta) + 1)) \\
& + 2\bar{\varepsilon}_0(\theta)\left(\varepsilon_\theta(\theta)(2f'(\theta) + \psi''(\theta)) + 2\frac{\varepsilon_{r\theta}^2(\theta) - \varepsilon_\theta^2(\theta) - \varepsilon_\theta(\theta)}{1 + 2\varepsilon_\theta(\theta)}\psi(\theta)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Рассматривается составная плита (рис. 2.1) с гранично-контактными условиями:

$$\sigma_{\theta\theta}'(\theta)|_{\theta=0} = \sigma_{\theta 2}'(\theta)|_{\theta=0}, \quad \sigma_{r\theta 1}(\theta)|_{\theta=0} = \sigma_{r\theta 2}(\theta)|_{\theta=0}, \tag{2.8}$$

$$u_1(\theta)|_{\theta=0} = u_2(\theta)|_{\theta=0}, \quad v_1(\theta)|_{\theta=0} = v_2(\theta)|_{\theta=0},$$

$$\sigma_{\theta\theta}'(\theta)|_{\theta=\alpha} = -q, \quad \sigma_{\theta 2}'(\theta)|_{\theta=\beta} = 0, \tag{2.9}$$

$$\sigma_{r\theta 1}(\theta)|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2}(\theta)|_{\theta=\beta} = 0.$$

Численное решение поставленной задачи в плоскости (α, β) определяет предельные кривые, разделяющие области сильной концентрации от области малонапряженности (рис. 2.2).

В третьем параграфе рассматривается случай, когда геометрическая нелинейность отсутствует.

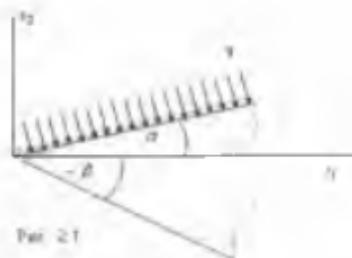
Тогда перемещения выбираются следующим образом:

$$u_i(r, \theta) = r\varphi_i'(\theta), \quad v_i(r, \theta) = -2r\varphi_i(\theta), \quad i = 1, 2.$$

Уравнения равновесия приводятся к виду:

$$\varphi_i'' + 4\varphi_i' = \frac{(\varphi_i'^2 + 4\varphi_i'^2)^{\frac{3-m}{2}}}{m\varphi_i'^2 + 4\varphi_i'^2}. \tag{2.9}$$

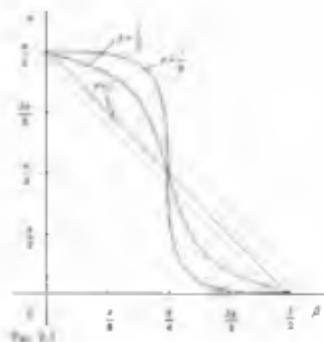
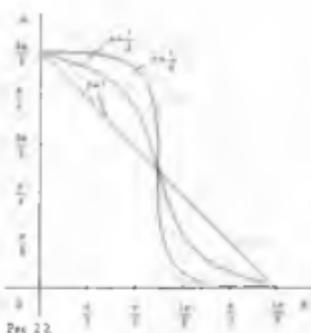
Гранично-контактные условия принимают форму:



$$\begin{aligned}
 H - 2k_1 \int_0^{\theta} \varphi_1''(\theta) \chi_1(\theta) d\theta + 4k_1 \varphi_1'(\theta) \chi_1(\theta) \Big|_{\theta=\alpha} &= -q, \\
 H - 2k_2 \int_0^{\theta} \varphi_2''(\theta) \chi_2(\theta) d\theta + 4k_2 \varphi_2'(\theta) \chi_2(\theta) \Big|_{\theta=\beta} &= 0,
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1''(\theta) \Big|_{\theta=\alpha} &= 0, \quad \varphi_2''(\theta) \Big|_{\theta=\beta} = 0, \\
 \varphi_1''(\theta) \chi_1(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \gamma \varphi_2''(\theta) \chi_2(\theta) \Big|_{\theta=0}, \\
 \varphi_1'(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \varphi_2'(\theta) \Big|_{\theta=0}, \\
 \varphi_1(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \varphi_2(\theta) \Big|_{\theta=0},
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где H - произвольная постоянная. Численное решение поставленной задачи определяет соотношение между углами раствора составляющих частей плиты, которое определяет предельно напряженное состояние в окрестности точки края контактной поверхности составной плиты (рис. 2.3).



Четвертый параграф посвящен анализу основных результатов, полученных в предыдущих параграфах второй главы.

Третья глава посвящена определению соотношений, определяющих наиболее прочное состояние неоднородной конической составной трубы. Считается, что составная труба изготовлена из степенно-упрочняемых материалов.

В первом параграфе приводятся характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние в неоднородной конической трубе.

Рассматривается несжимаемая, упрочняющаяся по степенному закону, неоднородная (т.е. $k = k(\theta)$, где $\alpha \leq \theta \leq \beta$) толстостенная коническая труба с внутренним углом α и внешним углом β . Предполагается, что коническая труба нагружена внутренним и внешним давлением p_1 , p_2 соответственно, а продольные перемещения и касательные напряжения, как на поверхностях, так и по всему объему трубы равны нулю. Принимая $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$, можно про-

анализировать случай действия только внутреннего или только внешнего давления. Напряженно-деформированное состояние неоднородной трубы в сферической системе координат описывается соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_\theta + 3Ak(\theta)X \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta + 6Ak(\theta)X \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \\ \sigma_\theta &= -p_1 + 6A \int_a^\beta k(\theta)X \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta,\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$X = 3^{m-1} |A|^{m-1} \frac{\cos^{m-1} \theta}{\sin^{2m-1} \theta}, \quad v = \frac{3Ar}{\sin \theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

где приняты следующие обозначения:

$$|A|^{m-1} = \frac{p_1 - p_2}{23^m J(\alpha, \beta)}, \quad J(\alpha, \beta) = \int_a^\beta k(\theta) \frac{\cos^{m+1} \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta. \quad (3.2)$$

Для компонентов напряжений и перемещения имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{J(\alpha, \beta)} J(\alpha, \theta) + \frac{p_1 - p_2}{2J(\alpha, \beta)} \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta}, \\ \sigma_\varphi &= -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{J(\alpha, \beta)} J(\alpha, \theta) + \frac{p_1 - p_2}{J(\alpha, \beta)} \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta}, \\ \sigma_\theta &= -p_1 + \frac{p_1 - p_2}{J(\alpha, \beta)} J(\alpha, \theta), \quad v = \frac{r}{\sin \theta} \left(\frac{p_1 - p_2}{2kJ(\alpha, \beta)} \right)^{\frac{1}{m}} \operatorname{sgn}(p_1 - p_2).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Если коническая труба находится под воздействием внутреннего давления, то $p_1 = p$ и $p_2 = 0$. Согласно теории наибольших касательных напряжений, при отсутствии осевой силы из (3.3) следует:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_\varphi - \sigma_\theta = \frac{p}{J(\alpha, \beta)} \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha}. \quad (3.4)$$

Во втором параграфе рассматривается составная, неоднородная коническая труба. Приводятся характеристические соотношения, определяющие те значения внутреннего диаметра y наружной трубы, которые обеспечивают наиболее прочное состояние данной составной трубы (рис. 3.1). Считается, что, при нагреве внешней конической трубы, в ней внутреннее отверстие увеличивается и дает возможность свободно вставить в него внутреннюю трубу. При остывании между трубами возни-



Рис. 3.1

Ось симметрии

кает контактное давление p_k , которое тоже подлежит определению. При посадке внешний угол внутренней трубы уменьшится, и точки трубы на контактной поверхности получат отрицательное смещение $-v_1$, которое в свою очередь придаст положительное смещение v_2 , а их сумма смещений должна равняться к натягу Δ . Учитывая, что $\Delta = \delta r$, где δ значительный малый угол, который надо определить из (3.3) и $v_2 - v_1 = \delta r$, для контактного давления p_k имеем:

$$p_k = \frac{2\delta^m \sin^m \gamma J(\gamma, \beta) J(\alpha, \gamma)}{D}, \quad D = \left(I^m(\alpha, \gamma) + J^m(\gamma, \beta) \right)^m. \quad (3.5)$$

Таким образом, при посадке внутренняя труба оказывается под действием внешнего давления p_k , а внешняя труба будет под действием точно такого же внутреннего давления.

Для эквивалентных напряжений во внутренней и внешней трубе имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ekvA} &= k_1(\alpha) \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} \left(\frac{p}{J(\alpha, \beta)} - \frac{p_k}{J(\alpha, \gamma)} \right), \\ \sigma_{ekvB} &= k_2(\gamma) \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} \left(\frac{p}{J(\alpha, \beta)} + \frac{p_k}{J(\gamma, \beta)} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из условия равнопрочности конических труб: $\sigma_{ekvA} = \sigma_{ekvB}$ для контактного давления имеем:

$$p_k = \frac{\frac{p}{J(\alpha, \beta)} \left(k_1(\alpha) \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} - k_2(\gamma) \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} \right)}{\frac{k_1(\alpha) \cos^m \alpha}{J(\alpha, \gamma) \sin^{2m} \alpha} + \frac{k_2(\gamma) \cos^m \gamma}{J(\gamma, \beta) \sin^{2m} \gamma}}. \quad (3.7)$$

Соотношения (3.5) и (3.7) будут определять значение δ :

$$\delta = \frac{\left(\frac{pD}{2J(\alpha, \beta)} \right)^{\frac{1}{m}} \left(k_1(\alpha) \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} - k_2(\gamma) \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} \right)^{\frac{1}{m}}}{\frac{k_1(\alpha) \sin^m \gamma \cos^m \alpha}{J(\alpha, \gamma) \sin^{2m} \alpha} + \frac{k_2(\gamma)}{J(\gamma, \beta)} \operatorname{ctg}^m \gamma}. \quad (3.8)$$

Для эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{ekvA} = \frac{p}{I(\gamma, \beta) \frac{\sin^{2m} \gamma}{\cos^m \gamma} + I(\alpha, \gamma) \frac{\sin^{2m} \alpha}{\cos^m \alpha}}, \quad (3.9)$$

где

$$\frac{J(\alpha, \gamma)}{k_1(\alpha)} = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{k_1(\theta) \cos^{m+1} \theta}{k_1(\alpha) \sin^{2m+1} \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\gamma} \omega_1(\theta) \frac{\cos^{m+1} \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta = I(\alpha, \gamma),$$

$$\frac{J(\gamma, \beta)}{k_2(\gamma)} = \int_{\gamma}^{\beta} \frac{k_2(\theta) \cos^{m+1} \theta}{k_2(\gamma) \sin^{2m+1} \theta} d\theta = \int_{\gamma}^{\beta} \omega_2(\theta) \frac{\cos^{m+1} \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta = I(\gamma, \beta) \quad (3.10)$$

Следуя методу Гадолина, для определения значения γ имеем:

$$\frac{\cos^{m+1} \gamma}{\sin^{2m+1} \gamma} \left(\omega_1(\gamma) \frac{\sin^{2m} \alpha}{\cos^m \alpha} - \omega_2(\gamma) \frac{\sin^{2m} \gamma}{\cos^m \gamma} \right) + mI(\gamma, \beta) \left(2 \frac{\sin^{2m-1} \gamma}{\cos^{m-1} \gamma} + \frac{\sin^{2m+1} \gamma}{\cos^{m+1} \gamma} \right) = 0. \quad (3.11)$$

В третьем параграфе рассматривается вопрос прочности конической, экспоненциально неоднородной ($k_1(\theta) = k_2(\theta) = e^{-\theta}$) линейно-упругой составной трубы. Уравнение (3.11) в этом случае проводится к виду:

$$2 \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^3 \gamma} \left(e^{-(\gamma-\alpha)} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \right) + \left(2 \sin \gamma + \frac{\sin^3 \gamma}{\cos^2 \gamma} \right) \int_{\gamma}^{\beta} e^{-(\theta-\gamma)} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta = 0. \quad (3.12)$$

В пространстве (α, β, γ) , оно определяет поверхность, показанную на рис. 3.2. Уравнения (3.12) определяют таблицу зависимостей $\left(\gamma, \frac{\sigma_{ekv}^{\min}}{\sigma_{ekv}} \right)$ от (α, β) .

Четвертый параграф посвящен исследованию прочности конической, неоднородной ($k_1(\theta) = k_2(\theta) = e^{-\theta}$) составной трубы, материалы которой имеют степенное упрочнение. Рассматривается случай, когда $m = \frac{1}{2}$. В этом случае уравнения (3.11) принимают вид:

$$\frac{\cos^{\frac{3}{2}} \gamma}{\sin^2 \gamma} \left(e^{-(\gamma-\alpha)} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} - \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos \gamma}} \right) + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\cos \gamma} + \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^{1.5} \gamma} \right) \int_{\gamma}^{\beta} e^{\gamma-\theta} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = 0. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) в пространстве (α, β, γ) определяет поверхность, показанный на рис. 3.3. Исходя из уравнения (3.13) можно получить таблицу зависимостей $\left(\gamma, \frac{\sigma_{ekv}^{\min}}{\sigma_{ekv}} \right)$ от (α, β) .

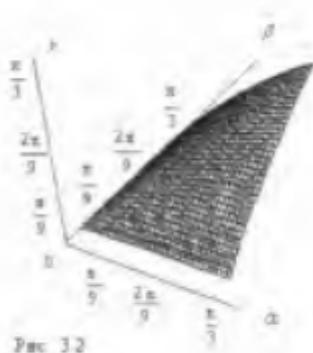


Рис. 3.2

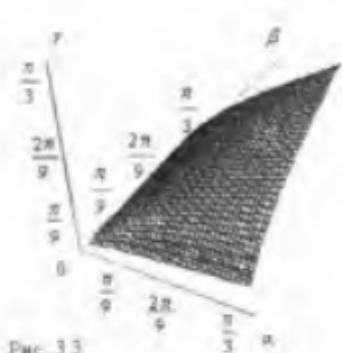


Рис. 3.3

В пятом параграфе приведен анализ основных результатов, которые получены в предыдущих параграфах третьей главы.

Основные результаты и выводы

1. Получены характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние, в окрестности угловой точки клиновидного тела исходя из уточненной теории изгиба плит Рейснера с учетом неоднородности материалов.
2. Получены характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние, в окрестности угловой точки клиновидного тела исходя из классической теории изгиба плит Кирхгофа с учетом неоднородности материалов.
3. Численным методом для произвольных граничных условий решена задача предельного напряженного состояния исходя из теорий Рейснера и Кирхгофа. Приведен анализ полученных результатов для каждого соответствующего случая.
4. Получены характеристические соотношения, определяющие напряженное состояние в окрестности угловой точки клиновидного тела в случае плоской деформации при физической и геометрической нелинейности тела. Численным методом получено соотношение, определяющее предельное напряженное состояние.
5. Получены характеристические соотношения, определяющие наиболее прочное состояние составной трубы. Численным методом получены соответствующие значения, обеспечивающие наилучшую прочность рассматриваемой составной трубы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Варданиян С.В., Задоян М.А. Задача малонапряженности неоднородных составных плит.// Изв. РАН МТТ, N5, 2005, (авт. 6 стр.).
2. Варданиян С.В., Задоян М.А. О концентрации напряжений в окрестности угловой точки неоднородной плиты при изгибе с учетом поперечных сдвигов.// Изв. РАН МТТ, N5, 2005, (авт. 7 стр.).
3. Варданиян С.В. Малонапряженное состояние нейтронно-облученной составных плит при различных граничных условиях // Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела. Материалы V Российской конференции с международным участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 83-87.
4. Варданиян С.В. Напряженное состояние в окрестности угловой точки нейтронно-облученной составной клинообразной плиты // Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела. Тез. докладов V Российской конференции с международным участием./ Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 33-34.
5. Варданиян С.В. Предельное концентрационное состояние в плоской задаче с учетом конечных деформациях. // Современные проблемы механики и прикладной математики, Материалы школы-семинара, посвященной 75-летию профессора Д.Д. Ивлева, Воронеж 2005. Том 1. С. 80-86.
6. Задоян М.А., Варданиян С.В. О прочности неоднородных, составных конических труб // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород – Сборник научных трудов посвященной 75-летию академика Е.И. Шемякина, Москва 2005, С. 202-206. (авт. 4 стр.).
7. Задоян М.А., Варданиян С.В. О прочности неоднородных конических труб.// Изв. РАН МТТ, N6, 2005, (авт. 3 стр.).

Личный вклад автора. В работах [1-4] в рамках сформулированной научным руководителем проблемы получены необходимые соотношения для выявления характера напряженного состояния в окрестности угловой точки неоднородных составных клинообразных плит и проведены численные расчеты. Вторая глава выполнена автором лично [5]. В третьей главе в рамках сформулированной научным руководителем проблемы [6,7] получены соотношения для исследования прочности составных, неоднородных конических труб.