На правах рукописи

ГЛУЩЕНКОВ Вячеслав Сергеевич

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара - 1999

Работа выполнена на кафедре Высшей математики и информатики Самарского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Сараев Л.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Радченко В.П.

кандидат физико-математических наук, доцент Ермоленко Г.Ю.

Ведущая организация: Институт машиноведения УрО РАН.

Защита состоится "20" декабря 1999 г. в "14" часов на заседании диссертационного совета К 063.94.01 при Самарском государственном университете по адресу: 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Самарского государственного университета.

Автореферат разослан "  " ____ 1999 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор Кожевников Е.Н.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ.** Широкое применение в различных областях науки и техники композиционных материалов обусловлено их уникальными свойствами.

Расчеты, основанные на эффективных (макроскопических) константах композитов, дают возможность во многих случаях верно оценивать предельные нагрузки и несущую способность элементов конструкций, течение дисперсных систем, многокомпонентных смесей и т. д., а также проектировать изготовление композиционных материалов с наперед заданными свойствами. Поэтому теоретическое прогнозирование макроскопических определяющих соотношений, основанное на информации относительно их внутренней геометрической структуры и реологических свойствах материалов фаз, является важной задачей механики композиционных материалов. Особенно актуальной в настоящее время является задача математического прогнозирования макроскопических свойств композиционных материалов, компоненты которых обладают нелинейными свойствами.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с грантами Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00524-а, 95-01-00404-а).

**ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ** является нахождение макроскопических определяющих соотношениий и определение эффективных механических характеристик многокомпонентных нелинейно - вязких, нелинейно - вязкопластических и нелинейно - наследственных микронеоднородных сред с различными типами связности составляющих компонентов.

**НАУЧНАЯ НОВИЗНА.** Построены новые математические модели, позволяющие прогнозировать макроскопическое поведение многокомпонентных композиционных материалов с различной степенью связности компонентов, механические свойства которых описываются: нелинейными реологическими моделями неньютоновских жидкостей с общим нелинейным механизмом вязкости; нелинейными реологическими моделями вязкопластического течения с общим нелинейным механизмом вязкости; нелинейными двухэлементными реологическими моделями типа релаксирующего тела Максвелла; нелинейными двухэлементными реологическими моделями типа тела последействия Фойгта.

**ДОСТОВЕРНОСТЬ** результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью постановки задач и использованием классических методов для их решения. В некоторых предельных случаях найденные эффективные соотношения для рассматриваемых многокомпонентных сред повторяют по структуре известные решения в механике композиционных материалов и совпадают с ранее полученными линейными моделями. Она также подтверждается хорошим совпадением теоретических расчетов с экспериментальными исследованиями других авторов.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ.** Полученные в диссертации результаты, отраженные в математических моделях, могут быть использованы в практике научно-исследовательских и проектно-конструкторских организаций, связанных с решением прикладных задач по разработке и проектированию композиционных материалов и конструкций из них.

**НА ЗАЩИТУ ВЫНОСЯТСЯ** эффективные определяющие соотношения для многокомпонентных стохастически армированных композиционных материалов с неньютоновскими и обладающими объемной вязкостью изотропными компонентами, имеющими внутреннюю структуру типа "Матрица - эллипсоидальные включения", а также определяющие соотношения для многокомпонентных композитов с нелинейно - вязкопластическими и нелинейно - наследственными компонентами, с внутреней структурой следующих типов: "Матричная смесь", "Матрица - сферические включения", "Матричная смесь - сферические включения".

**АПРОБАЦИЯ.** Материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на IV международной конференции "Математика, Компьютер, Образование", 29 января - 3 февраля 1997 г., Пущино;
- на Всероссийском научном семинаре "Механика микронеоднородных материалов и разрушение", 26-27 марта 1999г., Екатеринбург;
- на 46 научной конференции сотрудников факультета механизации СГСХА, "Повышение качества конструкционных и технологических материалов", 7-8 апреля 1999г., СГСХА, Самара;
- на девятой научной межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", 25-27 мая 1999 г., Самара;
- на научно-исследовательском семинаре кафедры "Механики деформируемого твердого тела" Самарского государственного университета, апрель 1997, (руководитель проф. В.И.Астафьев).
- на научно-исследовательском семинаре кафедры "Высшей математики и информатики" Самарского государственного университета, апрель 1998, апрель 1999 (руководитель проф. Л.А.Сараев).

**ПУБЛИКАЦИИ.** По теме диссертации опубликовано 7 работ.

**СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, выводов, заключения, списка литературы. Объем работы 123 страницы, из них 94 страницы текста, 4 рисунка, список литературы включает 218 наименований.

Автор считает своим долгом выразить благодарность доктору физико-математических наук, профессору Л.А. Сараеву и кандидату физико-математических наук В.А. Игнатьеву за консультации, постоянную поддержку и внимание к данной работе.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

**ВО ВВЕДЕНИИ** приводится обоснование выбора темы диссертационной работы, ее актуальность, научная новизна и практическая ценность, кратко изложено ее содержание и сформулированы основные положения, выносимые автором на защиту.

**В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ** приводится краткий аналитический обзор отечественной и зарубежной литературы по теме диссертации.

Отмечен крупный вклад российских ученых *К.С.Александрова, Б.Д.Аннина, В.И.Астафьева, А.В.Березина, В.В.Болотина, Б.И.Быковцева, В.А.Ванина, В.В. Васильева, С.Д.Волкова, В.Т.Головчана, М.Г.Грингауза, А.Н.Гузя, Б.М.Даринского, В.Я Долгих, В.В Дудукаленко, Ю.И.Кадашевича, Д.М.Карпиноса, А.Ф.Крегерса, В.М.Левина, В.А.Ломакина, А.К.Малмейстера, Б.П.Маслова, С.И.Мешкова, С.Т.Милейко, Е.А.Митюшова, Ю.В.Немировского, И.Ф.Образцова, Б.Е.Победри, Ю.Н.Работнова, В.П.Радченко, Л.А.Сараева, А.М.Скудры, Ю.В.Соколкина, В.П.Ставрова, В.В.Стружанова, Ю.В.Суворовой, В.П.Тамужа, А.А.Ташкинова, Ю.М.Тарнопольского, Л.А.Толоконникова, Г.А.Тетерса, Е.С.Уржумцева, Л.А.Фильштинского, Л.П.Хорошуна, Г.П.Черепанова, Т.Д.Шермергора* и других в развитие механики композиционных материалов. Отмечен также фундаментальный вклад зарубежных ученых *Д.Адамса, М.Берана, Л.Дж.Браутмана, Дж.Дьюи, Г.Дворака, Д.Друккера, А.Келли, Е.Кернера, Г.Книра, Р.Кристенсена, А.Рейсса, Б.У.Розена, Дж.Сендецки, В.Фойгта, З.Хашина, Р.Хилла, С.Штрикмана, Дж.Эшелби* и других.

В первой главе рассматривается также постановка задачи и методика установления эффективных свойств вязкопластических микронеоднородных сред с неньютоновскими компонентами.

Пусть неупругие свойства микронеоднородной среды задаются нелинейными определяющими уравнениями

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = E_{ijkl}\left(\mathbf{r}, \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r})\right)\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ - компоненты тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r})$ - компоненты тензора скоростей деформаций, $f_{i\,j} = \partial f_{i\,j} / \partial t$. $E_{ijkl}$- тензор случайных полей, описывающих механические свойства композита.

Микроструктура рассматриваемого композиционного материала описывается набором случайных индикаторных функций координат $æ_s(\mathbf{r})$, $s = 1, 2, \ldots, n$, каждая из которых равна единице на множестве точек объема $V_s$ $s$-го компонента и нулю вне этого множества.

После присоединения к локальным определяющим соотношениям (1) уравнений равновесия и формул Коши

$$\sigma_{i\,p,p}(\mathbf{r}) = 0, \qquad 2\,\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = v_{i,j}(\mathbf{r}) + v_{i,j}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

связывающих компоненты тензора скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ с компонентами вектора скоростей перемещений $v_i(\mathbf{r})$, получается замкнутая система уравнений, граничными условиями которой являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности $S$ объема $V$ : $f(\mathbf{r})\mid_{\mathbf{r}\in S} = \langle f \rangle$.

Связь между макровеличинами $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle$ в общем случае имеет вид

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = E^{*}_{ijkl}\left(\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle\right)\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle. \tag{3}$$

Здесь угловыми скобками обозначено среднее значение, вычисленное по полному объему композита, $E^{*}_{ijkl}$ - эффективный тензор реологических характеристик. Соотношения (3) получаются с помощью статистического осреднения системы уравнений (1) - (2).

Рассматриваемая система уравнений деформирования композиционного материала является физически нелинейной. Чтобы применить к ней стандартные методы линейной теории упругости для установления эффективных характеристик необходимо линеаризовать исходные локальные нелинейные уравнения состояния материалов компонентов среды (1), сделав определенные допущения. Рассматриваются следующие гипотезы линеаризации:

I. $A = \left\langle \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \right\rangle$ - функция $\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}$ в пределах объема композита считается однородной;

II. $A = \sqrt{\langle \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \rangle}$ - флуктуации инварианта $\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ в полном объеме композита считаются равными нулю;

III. $A_s = \sqrt{\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_s \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_s}$ -в пределах каждого компонента величина скоростей деформации считается однородной.

После линеаризации исходных локальных определяющих соотношений и испосредственного применения операции статистического осреднения получаем

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \sum_{s=1}^{n} c_s \, E_{ijkl}^{(s)}(\Lambda_s) \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \right\rangle_s, \; c_s = V_s V^{-1}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что для установления связи между макровеличинами $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle$ необходимо выразить средние по объемам компонентов величин $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle$, $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_s$ и параметры $\Lambda_s$ через макровеличины $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle$. Величины $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_s$ находятся из соотношения

$$\left\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \right\rangle_s = \left\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \right\rangle + c_s^{-1} \left\langle æ_s' \, \dot{\varepsilon}_{ij}' \right\rangle, \tag{5}$$

полученного статистическим осреднением по полному объему $V$ выражения $æ_s(\mathbf{r})\,\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r})$. Здесь и далее штрихами обозначены флуктуации величин в объеме $V$. Вычисление случайных моментов $\langle æ_s' \, \dot{\varepsilon}_{ij}' \rangle$ осуществляется осреднением исходной системы уравнений. С помощью соответствующего тензора Грина $G_{ij}(\mathbf{r})$ она сводится к системе интегральных уравнений

$$\dot{\varepsilon}_{ij}' = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\, \tau_{kl}'(\mathbf{r}_1)\, d(\mathbf{r}_1). \tag{6}$$

Величины $\tau_{ij}(\mathbf{r})$ в каждой конкретной задаче выражаются через случайные поля $æ_s(\mathbf{r})$, $\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r})$, константы линеаризации $\Lambda_s$ и материальные параметры компонентов.

Подстановка уравнений (6) в соотношение (5) и попытка вычислить $\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_s$ и $\Lambda_s$ приводит к появлению случайных моментов высоких порядков. При этом возникает бесконечная статистическая цепочка уравнений, которую для получения неформального решения задачи необходимо на каком-либо этапе оборвать, применив один из статистических методов осреднения.

В качестве рабочих методов применяется метод сингулярного приближения вторых производных тензора Грина в интегральных уравнениях равновесия и метод, основанный на результатах, полученных Дж. Эшелби при вычислении энергии деформирования неограниченной однородной среды, содержащей изолированное эллипсоидальное включение.

При постановке задачи и в ходе ее решения использовались следующие основные допущения: физические и геометрические величины, описывающие свойства композита, считаются статистически однородными и эргодическими случайными полями; все процессы деформирования, протекающие в композиционных материалах под воздействием детерминированных нагрузок, являются квазистатическими; деформации и скорости деформаций считаются инфинитезимальными; адгезия между материалами компонентов по границам раздела предполагается идеальной; воздействие массовых сил на компоненты композитов не учитывается; функции, описывающие в определяющих уравнениях нелинейное деформирование материалов компонентов композиционных материалов, зависят только от первого и второго инвариантов тензора деформаций.

**ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ** определяются эффективные законы течения многокомпонентных сред, компоненты которых описываются реологическими моделями неньютоновских жидкостей с произвольным нелинейным механизмом вязкости.

**В РАЗДЕЛЕ 2.1.** рассматриваются несжимаемые композиционные материалы, компоненты которых подчиняются нелинейному реологическому закону течения

$$s_{ij} = \mu_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}\right)\dot{e}_{ij}, s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7)$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{pp}$, $\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{pp}$; $\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$ - компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; $\mu_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}\right)$ - коэффициенты квазиньютоновской вязкости фаз.

Применение общей схемы метода осреднения системы уравнений равновесия (7), (2) с использованием гипотезы сингулярного приближения приводит к макроскопическим уравнениям для композиционных материалов с геометрической структурой типа "матричная смесь":

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle = \langle\mu\rangle\frac{3\xi}{1-2\xi}\left\langle\dot{e}_{ij}\right\rangle, \xi = \sum_{q=1}^{n}\frac{\mu_q(\Lambda)c_q}{5\langle\mu\rangle + 2\left(\mu_q(\Lambda) - \langle\mu\rangle\right)} \qquad (8)$$

Для среды типа "матрица - сферические включения" эффективный закон течения имеет вид:

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle = \mu_1(\Lambda)\frac{3\zeta}{1-2\zeta}\left\langle\dot{e}_{ij}\right\rangle, \quad \zeta = \sum_{q=1}^{n}\frac{\mu_q(\Lambda)c_q}{5\mu_1(\Lambda) + 2\left(\mu_q(\Lambda) - \mu_1(\Lambda)\right)}. \qquad (9)$$

Если дисперсионная фаза содержит абсолютно жесткие включения, то макроскопические соотношения для подобной суспензии получаются из формулы (9) с помощью предельного перехода $\mu_s \to \infty$ при $s \neq 1$.

На рисунке 1 показано сравнение теоретической кривой течения смеси полиэтиленов низкой и высокой плотности при температуре 463 К., рассчитанной по формуле (8) (сплошная линия) с экспериментальными данными[1]. (точки). Штриховые линии - кривые течения расплавов компонентов.

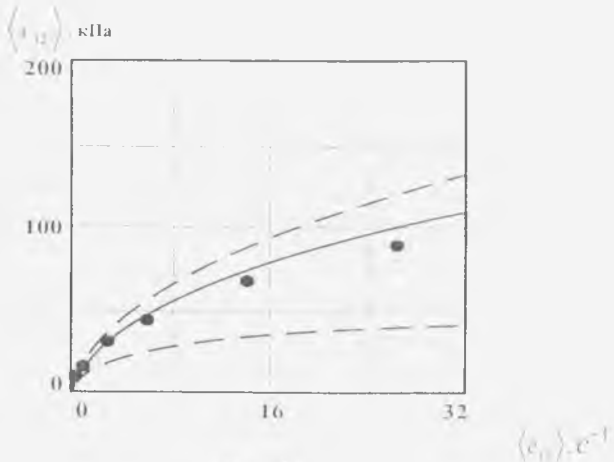


Рис. 1

На рисунке 2 показано сравнение теоретической кривой течения при сдвиге расплава полипропилена с температурой 473 K, наполненного частицами карбоната кальция с объемной концентрацией $c_2 = 0{,}081$, рассчитанной по формулам (9) (сплошная линия) с экспериментальными данными[2]. Штриховая линия - кривая течения чистого полипропилена, точки - экспериментальные данные. Для полипропилена $\eta_1 = 5{,}437$ кПа$\times$ $c^n$, $n = 0{,}474$

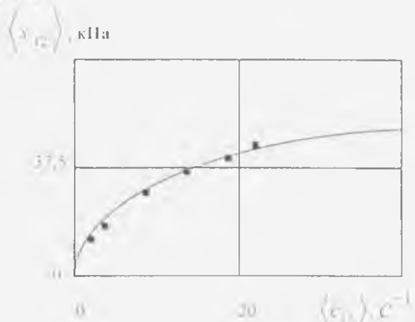


Рис. 2.

Если связующая матрица образована первыми $m$ взаимопроникающими компонентами, а остальные $n-m$ компонентов распределены в этой матрице в виде отдельных сферических включений, то эффективные соотношения принимают вид

---

[1] Бережная Н.В., Каган Д.Ф., Захарчук Л.Н. Течение смесей полиэтиленов низкой и высокой плотности // Реология полимеров и дисперсных систем и реофизика: В 2-ч.-Минск: Из-во института теорет. механики, 1975.-Ч.1.-С. 108-112.

[2] Han C.D. Rheological properties calcium-carbonate filled polypropylene melts // J. Appl. Sci.-1974.-vol. 18,No4.-P.821-829.

$$\langle s_{ij}\rangle=\{\mu\}\frac{3\varsigma}{1-2\varsigma}\langle\dot{e}_{ij}\rangle,\ \varsigma=\sum_{q=1}^{n}\frac{\mu_q(\Lambda)c_q}{5\{\mu\}+2\left(\mu_q(\Lambda)-\{\mu\}\right)},\tag{10}$$

где $\{\mu\}=\sum_{s=1}^{m}\mu_s(\Lambda)c_s$ - среднее значение коэффициентов вязкости в объеме матрицы.

**В РАЗДЕЛЕ 2.2.** с помощью применения обобщенного сингулярного приближения находятся макроскопические уравнения течения несжимаемых неньютоновских жидкостей в общем виде:

$$\langle s_{ij}\rangle=\frac{3\mu\theta}{1-2\theta}\langle\dot{e}_{ij}\rangle,\ \theta=\sum_{q=1}^{n}\frac{\mu_q(\Lambda)c_q}{5\mu+2\left(\mu_q(\Lambda)-\mu\right)},\tag{11}$$

где $\mu$-параметр тела сравнения, $\min_s\{\mu_s(\Lambda)\}\le\mu\le\max_s\{\mu_s(\Lambda)\}$.

Константа $\Lambda$ находится из уравнений:

$$\text{I: }\Lambda=\sqrt{\frac{3\mu\theta}{\langle\mu(\Lambda)\rangle(1-2\theta)}}\langle\dot{e}_{ij}\rangle,\quad \text{II: }\Lambda=\frac{3\mu}{1-2\theta}\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\frac{c_s}{\left(5\mu+2[\mu_s(\Lambda)]\right)^2}}\langle\dot{e}_{ij}\rangle.$$

Если положить в формуле (11) $\mu=\langle\mu(\Lambda)\rangle$; $\mu=\mu_1(\Lambda)$; $\mu=\{\mu\}$ то получатся модели типа “матричная смесь” (8), “матрица - сферические включения” (9), “матричная смесь - сферические включения”(10) соответственно.

При всех $\mu_s=const$ соотношение (11) описывает эффективный закон течения несжимаемой ньютоновской жидкости.

При $\mu_s(\Lambda)\Lambda\to k_s$ построенные модели сводятся к моделям с идеальными жесткопластическими компонентами с поверхностью текучести Мизеса $(\mu_s=k_s)$, ассоциированный закон течения которых имеет вид $s_{ij}=\frac{k_s}{\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}}\dot{e}_{ij}$. Здесь $k_s$-пределы текучести фаз при чистом сдвиге.

**В РАЗДЕЛЕ 2.3.** рассматривается течение неньютоновских структурно-неоднородных материалов, компоненты которых полагаются сжимаемыми нелинейно-вязкими жидкостями, реологические свойства которых описываются моделью, учитывающей механизм объемной вязкости:

$$s_{ij}=2\,\mu_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}\,\dot{e}_{kl}}\right)\dot{e}_{ij},\qquad \sigma_{pp}=3\,K_s\,\dot{\varepsilon}_{pp},\quad s=1,2,\ldots,n.\tag{12}$$

Использование обобщенного сингулярного приближения приводит к макроскопическим соотношениям

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle = 2\,\mu^{*}(\Lambda)\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle,\ \left\langle \sigma_{pp}\right\rangle = 3\,K^{*}(\Lambda)\left\langle \dot{\varepsilon}_{pp}\right\rangle, \tag{13}$$

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle = 2\,\mu^{*}(\Lambda_s)\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle,\ \left\langle \sigma_{pp}\right\rangle = 3\,K^{*}(\Lambda_s)\left\langle \dot{\varepsilon}_{pp}\right\rangle, \tag{14}$$

в которых

$$\mu^{*} = \mu\frac{(1-\alpha)\xi}{1-\alpha\,\xi},\quad \xi = \sum_{s=1}^{n}\frac{c_s\,\mu_s(\Lambda_s)}{\mu+\alpha\big((\mu_s(\Lambda_s)-\mu)\big)},$$

$$K^{*} = K\frac{(1-\gamma)\eta}{1-\gamma\,\eta},\quad \eta = \sum_{s=1}^{n}\frac{c_s\,K_s}{K+\gamma(K_s-K)}, \tag{15}$$

где $\alpha$ и $\gamma$ выражаются через коэффициент Пуассона тела сравнения,

$$\min_s\{\mu_s(\Lambda_s)\} \le \mu \le \max_s\{\mu_s(\Lambda_s)\},\ \min_s\{K_s\} \le K \le \max_s\{K_s\}.$$

Константы линеаризации находятся из уравнений:

I: $\Lambda = \sqrt{\dfrac{3\mu\xi}{\langle\mu(\Lambda)\rangle(1-2\xi)}}\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle$, II: $\Lambda = \dfrac{3\mu}{5-2\xi}\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{n}\dfrac{c_s}{\big(\mu+\alpha(\mu_s(\Lambda_s)-\mu)\big)^2}}\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle$,

III: $\Lambda_s = \dfrac{(1-\alpha)\mu+\alpha\,\mu^{*}}{\mu+\alpha(\mu_s(\Lambda_s)-\mu)}\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle$.

Задавая $\mu = \langle\mu(\Lambda)\rangle,\ K = \langle K\rangle;\quad \mu = \mu_1(\Lambda),\ K = K_1;\ \mu = \sum\limits_{s=1}^{m}\mu_s(\Lambda)c_s,$ $K = \sum\limits_{s=1}^{m}K_s\,c_s,\ 1 < m < n$, получим модели композиционных материалов с различным типом связности составляющих компонентов.

**В РАЗДЕЛЕ 2.4.** рассматривается течение композиционного материала, состоящего из однородной матрицы, содержащей разориентированные эллипсоидальные включения.

Локальные свойства компонентов задаются уравнениями (12), положение эллипсоидов $s$ – го компонента направления $f$ с полуосями $a_1^s$, $a_2^s$, $a_3^s$ описывается набором индикаторных функций $æ_{s,f}(\mathbf{r})$, $f = 1,2,\ldots,m_s$.

Получен макроскопический закон течения

$$\left\langle \sigma_{ij}\right\rangle = E^{*}_{ijkl}(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)\left\langle \dot{\varepsilon}_{kl}\right\rangle. \tag{16}$$

Здесь

$$E^{*}_{ijkl} = 2\,\mu_1(\Lambda_1)I_{ijkl} + \lambda_1(\Lambda_1)\delta_{ij}\delta_{kl} + \sum_{s=2}^{n}L_{ijmr}\Big(2\big[\mu_s(\Lambda_s)\big]\,I_{mrpq} + \delta_{mr}\delta_{pq}\big[\lambda_s(\Lambda_s)\big]\Big)a^{(s)}_{pqkl},$$

где тензоры $L_{ijmr}$, $a_{pqkl}^{(s)}$ определяются с помощью тензора Эшелби и материальных параметров компонентов.

При вырождении эллипсоидов в сферы ($a_1^s = a_2^s = a_3^s$) соотношения (16) правильно преобразуются в формулы (14), описывающие композиционные материалы типа "матрица - сферические включения".

Если эллипсоидальные включения ориентированы равновероятно по всем направлениям, $c_{s\,1} = c_{s,2} =, \ldots, = c_{s\,m_s}$, $s = 1, 2, \ldots, m_s$, то эффективный тензор материальных параметров компонентов $E_{ijkl}^*$ будет изотропным.

Рассмотрим частный случай $n = 2$. Если связующей матрицей является несжимаемая жидкость, а включения - абсолютно жесткие $\left(\mu_2, K_2 \to \infty\right)$, имеющие форму эллипсоидов вращения, то эффективные определяющие соотношения (16) запишутся в виде

$$\left\langle s_{ij} \right\rangle = 2\,\mu^* \left\langle e_{ij} \right\rangle, \qquad \mu^* = \eta_1\left(1 + 2c_2/c_1 S\right), \tag{17}$$

где величина $S$ зависит от компонентов тензора Эшелби и выражается через элементарные функции.

На рисунке 3 приведены результаты численных расчетов по формулам (17) (сплошная линия) и вискозиметрических исследований[3] (точки) сдвигового течения суспензии ньютоновской полимерной жидкости полибутена со стеклянными чешуйками. Объемная концентрация включений составляет $c_2 = 0{,}033$, а отношение главных полуосей чешуек имеет среднее значение $\omega = 1/45$. Вязкость жидкости имеет величину $\eta_1 = 5{,}481$ Па×с . Штриховая линия - кривая течения чистого полимера.

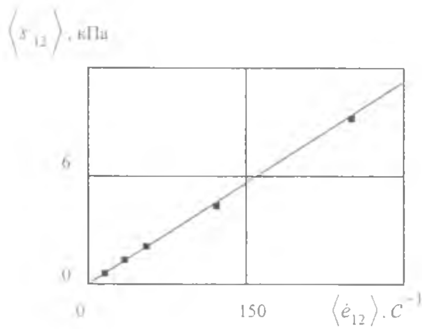

Рис. 3.

**В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ** определяются эффективные законы течения многокомпонентных сред, компоненты которых описываются вязкопластическими моделями с произвольным нелинейным механизмом вязкости.

**В РАЗДЕЛЕ 3.1.** рассматривается задача нахождения эффективных определяющих соотношений течения сред, образованных $n$ компонентами, каждый из которых моделируется параллельным соединением вязкого и идеально - пластического элемен-

---

[3] Ziegel K.D. The viscosity of suspensions of large, non-spherical particles in polymer fluids // J. Coll. and Interface Sci.-1970.-Vol. 34, No 2.-P. 185-196.

тов (модель Бингама).

Локальные определяющие уравнения течения компонентов имеют вид:

$$s_{ij} = k_s \frac{\dot{e}_{ij}}{\sqrt{\dot{e}_{kl}\,\dot{e}_{kl}}} + \mu_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}\right)e_{ij}\,. \tag{18}$$

С помощью применения обобщенного сингулярного приближения получаются эффективные определяющие уравнения вязкопластического течения

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle = \left(\frac{k}{\Lambda} + \mu\right)\frac{3\theta}{1-2\theta}\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle. \tag{19}$$

где $\theta = \sum\limits_{q=1}^{n} \dfrac{\left(k_q + \Lambda\,\mu_q(\Lambda)\right)c_q}{5\left(\langle k\rangle + \Lambda\langle\mu(\Lambda)\rangle\right) + 2\left(\left[k_q\right] + \Lambda\left[\mu_q(\Lambda)\right]\right)}$, $\quad \langle\mu(\Lambda)\rangle = \sum\limits_{s=1}^{n}\mu_s(\Lambda)c_s$ ,

$$\langle k\rangle = \sum_{s=1}^{n} k_s c_s\ , \quad \left[k_s\right] = k_s - k\,, \quad \left[\mu_s(\Lambda)\right] = \mu_s(\Lambda) - \mu,$$

$$\min_s\{k_s\} \le k \le \max_s\{k_s\}, \quad \min_s\{\mu_s(\Lambda)\} \le \mu \le \max_s\{\mu_s(\Lambda)\}$$

Константа линеаризации определяется из уравнений

$$\text{I:}\quad \Lambda = \sqrt{\frac{(k + \Lambda\mu)3\theta}{\left(\langle k\rangle + \Lambda\langle\mu(\Lambda)\rangle\right)(1-2\theta)}}\,\left\langle \dot{e}_{ij}\right\rangle$$

$$\text{II:}\quad \Lambda = \frac{3(k + \Lambda\mu)}{1-2\theta}\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\frac{c_s}{\left(5(k + \Lambda\mu) + 2\left(\left[k_s\right] + \Lambda\left[\mu_s(\Lambda)\right]\right)\right)^2}}\,\left\langle e_{ii}\right\rangle$$

Если в (19) положить $k = \langle k\rangle$, $\mu = \langle\mu(\Lambda)\rangle$; $k = k_1$, $\mu = \mu_1(\Lambda)$; $k = \{k\}$, $\mu = \{\mu\}$, то получатся модели композиционного материала типа "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения" соответственно.

В случае, если все $\mu_s(\Lambda) = 0$ формулы (19) определяют эффективный закон текучести жесткопластических микронеоднородных сред.

Если все $k_s = 0$, то уравнения (19) описывают течение нелинейных вязких несжимаемых сред.

**В РАЗДЕЛЕ 3.2.** получен эффективный закон течения вязкопластической среды, образованной $n$ компонентами, каждый из которых моделируется последовательным соединением вязкого и идеально - пластического элементов (ползучепластические среды). Локальные определяющие соотношения записываются в виде

$$\dot{e}_{ij} = \left( \frac{\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}}{k_s} + \frac{1}{\mu_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}\dot{e}_{kl}}\right)} \right) s_{ij},\ s = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Применение варианта статистического метода осреднения системы уравнений равновесия (20), (2) приводит к макроскопическому закону течения

$$\langle \dot{e}_{ij} \rangle = \frac{1 - 2\xi}{3\lambda\xi} \langle s_{ij} \rangle;\quad \xi = \sum_{q=1}^{n} \frac{\lambda_q\ c_q}{3\lambda + 2\lambda_q}, \tag{21}$$

где $\lambda_s = \left( \frac{\Lambda}{k_s} + \frac{1}{\mu_s(\Lambda)} \right)^{-1}$, $\min_s\{\lambda_s\} \le \lambda \le \max_s\{\lambda_s\}$.

Константа $\Lambda$ находится из уравнений:

I: $\Lambda^2 = \frac{1 - 2\xi}{3\lambda\langle\lambda\rangle\xi}\langle s_{ij} \rangle^2$, II: $\Lambda = \frac{\langle s_{ij} \rangle}{\xi}\sqrt{\sum_{s=1}^{n} \frac{c_s}{(3\lambda + 2\lambda_s)^2}}$.

Полагая в (21) $\lambda = \langle\lambda\rangle$; $\lambda = \lambda_1$; $\lambda = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s c_s$, $1 < m < n$, получим модели композиционных материалов с различным типом связности компонентов.

**В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ** рассматриваются композиционные материалы с нелинейными вязко-упругими компонентами, механические свойства которых описываются реологическими моделями типа релаксирующего тела Максвелла и тела последействия Фойгта.

**В РАЗДЕЛЕ 4.1.** получены макроскопические соотношения для многокомпонентных максвелловских сред, упругие элементы компонентов которых подчиняются обобщенному закону линейной упругости

$$s_{ij}(\mathbf{r},t) = 2\ \mu_s\ e_{ij}(\mathbf{r},t),\ \sigma_{kk}^{(s)}(\mathbf{r},t) = 3\ K_s\ \varepsilon_{kk}^{(s)}(\mathbf{r},t), \tag{22}$$

а вязкие - нелинейным законам течения

$$s_{ij}(\mathbf{r},t) = 2\ \eta_s\varphi_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)}\right)\dot{e}_{ij}(\mathbf{r},t). \tag{23}$$

Здесь $\mu_s$ - сдвиговые модули упругости; $\eta_s\varphi_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)}\right)$ - коэффициенты вязкости фаз.

С целью линеаризации соотношений (23) будем пренебрегать флуктуациями функции $\varphi(\mathbf{r},t) = \sum_{s=1}^{n}\varphi_s\left(\sqrt{\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)\dot{e}_{kl}(\mathbf{r},t)}\right)æ_s(\mathbf{r})$ в объеме композиционного материала $V$, заменяя в ней девиаторные составляющие тензоров скоростей деформаций на их средние значения:

$$\varphi(\mathbf{r},t) \approx \sum_{s=1}^{n} c_s \varphi_s\left(\left\langle e_{kl}(t)\right\rangle\right) = \Delta(t). \tag{24}$$

В этом случае исходная вязко-упругая задача сводится при помощи преобразования Лапласа к линейно-упругой в пространстве изображений. Ее решение ищется при помощи упругой-вязкоупругой и гидродинамической аналогий в механике деформируемого твердого тела на основании результатов, полученных во второй главе.

Искомая связь между макровеличинами в пространстве изображений в общем случае имеет вид

$$\left\langle \overline{s}_{ij}(p)\right\rangle = 2p\overline{M}^{*}(p)\left\langle \overline{e}_{ij}(p)\right\rangle, \quad \left\langle \overline{\sigma}_{kk}(p)\right\rangle = 3p\overline{K}^{*}(p)\left\langle \overline{\varepsilon}_{kk}(p)\right\rangle. \tag{25}$$

Здесь

$$2p\overline{M}^{*}(p) = \frac{\sum\limits_{l=0}^{L} a_l p^l}{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m p^m}, \quad 3p\overline{K}^{*}(p) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} f_n p^n}{\sum\limits_{r=0}^{R} q_r p^r}. \tag{26}$$

В качестве "базисных" упругих решений используются эффективные соотношения (15), после отождествления в них полей скоростей вязких деформаций с полями упругих деформаций, а квазиньютоновских и объемных вязкостей компонентов композиционного материала с модулями упругости при сдвиге и объемном деформировании соответственно. Тогда макроскопические уравнения нелинейной наследственности записываются в дифференциально - операторной форме

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{M} b_m D_m\left(\left\langle s_{ij}(t)\right\rangle\right) = \sum_{l=0}^{L} a_l D_l\left(\left\langle e_{ij}(t)\right\rangle\right), \\ &\sum_{r=0}^{R} q_r D_m\left(\left\langle \sigma_{kk}(t)\right\rangle\right) = \sum_{n=0}^{N} f_n D_l\left(\left\langle \varepsilon_{kk}(t)\right\rangle\right), \end{aligned} \tag{27}$$

где $D_p\{\ldots\} = \left\{\Delta(t)\dfrac{d}{dt}\right\}^p\{\ldots\}$.

Коэффициенты $a_l$, $b_m$, $f_n$, $q_r$ в выражении (27) являются рациональными алгебраическими функциями материальных параметров компонентов композиционного материала и их объемных концентраций $\mu_s$, $\eta_s$, $K_s$, $c_s$, конкретный вид которых определяется из соотношений (15), (26), если в них положить $\overline{\mu}_s = \dfrac{\mu_s\,\eta_s\,p}{\mu_s + p\eta_s}$, $\overline{K}_s = K_s$ и задать $\overline{\mu}$ и $\overline{K}$ в зависимости от внутренней геометрической структуры исследуемого композиционного материала. Задавая $\overline{\mu} = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s\overline{\mu}_s$, $\overline{K} = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s K_s$,

$\overline{\mu} = \overline{\mu}_1$, $\overline{K} = K_1$; $\overline{\mu} = \sum\limits_{s=1}^{m} c_s \overline{\mu}_s$, $\overline{K} = \sum\limits_{s=1}^{m} c_s K_s$, $1 < m < n$, получим модели с различным типом связности компонентов.

**В РАЗДЕЛЕ 4.2.** получены макроскопические соотношения для многокомпонентных фойгтовских сред, упругие элементы компонентов которых подчиняются обобщенному закону линейной упругости (22), а вязкие - закону

$$s_{ij}(\mathbf{r},t) = 2\ \eta_s \psi_s\left(\sqrt{s_{kl}(\mathbf{r},t) s_{kl}(\mathbf{r},t)}\right) \dot{e}_{ij}(\mathbf{r},t).$$

Тогда макроскопические соотношения, записанные в дифференциально-операторной форме имеют вид (27), где $D_p\{\ldots\} = \left\{\Lambda(t)\dfrac{d}{dt}\right\}^p \{\ldots\}$,

$$\Lambda(t) = \sum_{s=1}^{n} c_s \psi_s\left(\left\langle s_{kl}(t)\right\rangle\right).$$

Значения коэффициентов $b_m$, $a_l$, $q_r$, $f_n$ определяются формулами (26), (15), если в них положить $\overline{\mu}_s = \mu_s + p\,\eta_s$, $\overline{K}_s = K_s$ и задать $\overline{\mu}$ и $\overline{K}$ соответствующим образом. Задавая $\overline{\mu} = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \overline{\mu}_s$, $\overline{K} = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s K_s$; $\overline{\mu} = \overline{\mu}_1$, $\overline{K} = K_1$; $\overline{\mu} = \sum\limits_{s=1}^{m} c_s \overline{\mu}_s$, $\overline{K} = \sum\limits_{s=1}^{m} c_s K_s$, $1 < m < n$, получим модели с различным типом связности компонентов.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Построены эффективные законы течения многокомпонентных нелинейно - вязких несжимаемых и обладающих объемной сжимаемостью композиционных материалов, компоненты которых описываются уравнениями неньютоновских сред, а внутренняя структура отвечает трем типам армирования: "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения".

2. Установлены макроскопические определяющие соотношения для многокомпонентных нелинейно - вязких неньютоновских композиционных материалов, обладающих объемной сжимаемостью и имеющих внутреннюю структуру типа "матрица - эллипсоидальные включения"

3. Для композиционных материалов, обладающих объемной вязкостью компонентов в общем случае выявлена нелинейная зависимость эффективных объемных характеристик от локальных материальных параметров компонентов и их объемных концентраций. При постоянных, совпадающих между собой, объемных характеристиках фаз эта связь является линейной.

4. Установлены эффективные законы течения несжимаемых нелинейно - вязкопластических сред с реологией Бингама, внутренняя структура которых отвечает трем типам армирования: "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения".

5. Установлены эффективные законы течения несжимаемых нелинейно - вязкопластических сред типа "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения", компоненты которых моделируются последовательным соединением нелинейно-вязкого и идеально-пластического элементов (ползучепластические среды).

6. Установлены макроскопические реологические соотношения нелинейной наследственности, записанные в дифференциально-операторной форме для многокомпонентных обладающих объемной сжимаемостью композиционных материалов, для которых свойства материалов фаз описываются двухэлементными реологическими моделями типа релаксирующего тела Максвелла с нелинейными элементами вязкости общего вида, а внутренняя структура отвечает трем типам армирования: "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения".

7. Установлены макроскопические реологические соотношения нелинейной наследственности, записанные в дифференциально-операторной форме для многокомпонентных обладающих объемной сжимаемостью композиционных материалов, для которых свойства материалов фаз описываются двухэлементными реологическими моделями типа тела последействия Фойгта с нелинейными элементами вязкости общего вида, а внутренняя структура отвечает трем типам армирования: "матричная смесь", "матрица - сферические включения" и "матричная смесь - сферические включения".

8. Для рассматриваемых композиционных материалов, обладающих объемной сжимаемостью компонентов в общем случае выявлена нелинейная зависимость эффективных объемных функций релаксации и ползучести от материальных характеристик компонентов и их объемных концентраций не смотря на то, что каждый из материалов фаз при объемном нагружении ведет себя линейно-упругим образом. При совпадающих значениях объемных модулей упругости компонентов эффективная связь между гидростатическим давлением и объемной деформацией является линейной.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Глущенков В.С. К расчету определяющих соотношений линейной наследственности многокомпонентных микронеоднородных сред // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды девятой межвузовской конференции 25-27 мая 1999 г., Часть 1, Самара 1999, с. 50-54.

2. Глущенков В.С. Прогнозирование эффективных параметров многокомпонентных вязкопластических микронеоднородных сред // Вестник СамГТУ, выпуск 6. Серия "Физико-математическая", Самара 1998, с. 40-46.

3. Глущенков В.С. Прогнозирование эффективных характеристик многокомпонентных ползучепластических композиционных материалов // Совершенствование конструкции и технологии использования сельскохозяйственной техники. Сб. науч. тр. / СГСХА-Самара 1999, с. 23-25.

4. Глущенков В.С. Эффективные параметры течения изотропных ползучепластических двухкомпонентных матричных смесей // Совершенствование коструктции и технологии использования сельскохозяйственной техники. Сб. науч. тр. / СГСХА-Самара 1999, с. 21-23.

5. Сараев Л.А., Глущенков В.С. Прогнозирование вязкопластических свойств многокомпонентных смесей // Механика микронеоднородных материалов и разрушение. Тезисы докладов Всероссийского научного семинара / Под ред. Ю.В. Соколкина.- Пермь: ПермГТУ, 1999, с. 44.

6. Сараев Л.А., Игнатьев В.А., Глущенков В.С. Вязкопластические свойства многокомпонентных смесей // IV Международная конференция "Математика, Компьютер, Образование" (Пущино, 29 января-3 февраля 1997г) Тезисы, Москва, 1997, с. 136.

7. Сараев Л.А., Игнатьев В.А., Глущенков В.С. Вязкопластические свойства многокомпонентных смесей // Труды четвертой международной конференции "Математика, Компьютер, Образование". Пущино, 29 января - 3 февраля 1997 г., Москва, 1997, с. 239-243.

ЛР № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 9.11.99. Формат 60ч84/16
Бумага офсетная. Печать оперативная. Объем 1 п.л. Тираж 100экз.
Заказ № 268 Изд-во «Самарский университет» УОП СамГУ ПЛД. № 67-43
от 19.02.98