НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ФАЙЗУЛИН Тимур Айратович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

УФА 2007

Работа выполнена на кафедре математики Уфимского государственного авиационного технического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Г. Т. Булгакова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В. И. Астафьев

доктор физико-математических наук, профессор В. П. Радченко

Ведущее предприятие: ГОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (факультет ВМиК).

Защита состоится 27.04.2007 г. в 15^{00} час в ауд. 209 на заседании диссертационного совета ДМ 212.215.05 при Самарском государственном аэрокосмическом университете по адресу: г. Самара, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Самарского государственного аэрокосмического университета.

Автореферат разослан 26 марта 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д-р техн. наук, профессор А. А. Калентьев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Релаксационные процессы необычайно широко распространены в окружающем нас мире. Практическая необходимость их изучения требуется как для более углубленного проникновения в фундаментальные законы природы, так и для использования в важных технических приложениях. Изучаемые процессы описываются, как правило, сложными нелинейными уравнениями в частных производных. Поэтому помимо традиционных аналитических методов теоретического исследования универсальным и мощным инструментом для решения таких задач являются численные методы, позволяющие проводить численные эксперименты для выявления закономерностей изучаемых процессов. Одной из сфер широкого применения математического моделирования релаксационных процессов является подземная гидромеханика.

В последние годы в области нестационарной многофазной фильтрации накоплен весьма богатый экспериментальный и теоретический опыт. Однако, в силу значительной сложности изучаемых объектов, имеющиеся результаты являются далеко не полными. Они не снимают как проблемы адекватности рассматриваемым процессам математических моделей многофазных фильтрационных потоков в пористых средах, так и необходимости создания новых и развития старых методов их исследования.

Вопросам описания неравновесной фильтрации в различной постановке посвящен ряд работ И. М. Аметова, Г. И. Баренблатта, О. Б. Бочарова, В. И. Ентова, Ю. П. Желтова, А. В. Костерина, В. В. Кузнецова, А. К. Курбанова. В. И. Медведкова, А. Х. Мирзаджанзаде, Р. И. Нигматуллина, В. Н. Николаевского, Б. М. Панфилов, Г. П. Цыбульского и др.

Уравнения, описывающие фильтрационные течения с учетом нелинейных и релаксационных свойств, представляют собой сложные системы дифференциальных уравнений в частных производных. В общем случае это нелинейная система смешанного типа. Граничные условия, дополняющие уравнения, задаются на характеристиках из физических соображений. При этом возникает проблема корректности постановки этих задач (существование, единственность и устойчивость) и построение решения аналитическими и численными методами. Точное решение, хотя предпочтительнее численного, однако, в силу значительной сложности изучаемых объектов, не всегда реализуемо. Использование численных алгоритмов приводит к необходимости дополнительных исследований: проверки сходимости, исследования устойчивости и погрешности. В этом случае особый интерес представляют численные методики, позволяющие количественно исследовать явления и процессы, которые ранее имели лишь качественное описание.

Всё вышеизложенное определяет актуальность диссертационной работы, посвященной вопросам моделирования нестационарных многофазных течений в пористых средах.

Целью работы является построение и анализ математических моделей, описывающих движение многофазных фильтрационных потоков с использованием нелинейных и неравновесных физико-химических свойств в пористых средах.

Задачи диссертационной работы.

1. Обоснование корректности постановки краевой задачи неравновесной фильтрации двухфазной жидкости с нестационарными граничными условиями и построение приближенно-аналитических решений; разработка алгоритма численного расчета задачи и проверка его адекватности на полученных точных решениях в частных случаях.
2. Исследование математической модели движения газожидкостной смеси со сложными нелинейными и неравновесными свойствами, вызванными переходными условиями в пористых средах.
3. Исследование математической модели фильтрации трехфазной жидкости в пористых средах в переходных условиях: исследование влияния водонасыщенности на структуру фильтрационного потока газожидкостной системы.
4. Реализация численных алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Научная новизна положений, выносимых на защиту:

- предлагается нестационарное граничное условие для краевой задачи неравновесной фильтрации двухфазной жидкости, которое учитывает особенности переходных процессов, доказывается существование и единственность решения поставленной задачи;
- построены точные и приближенно-аналитические решения, а также предложен численный алгоритм расчета для задачи неравновесной двухфазной фильтрации;
- разработана и исследована в рамках вычислительного эксперимента модифицированная модель фильтрации газожидкостной смеси в переходных условиях.

Практическая ценность работы. Полученные результаты могут быть использованы в исследовании конкретных моделей физики, химии, техники и других отраслей научных знаний. Предложенные математические модели расширяют теоретические представления о неравновесных и нелинейных эффектах в процессах фильтрации газожидкостной системы. Численный алгоритм решения задачи неравновесной двухфазной фильтрации может быть использован для решения конкретной прикладной задачи: определения относительных фазовых проницаемостей по данным нестационарных исследований образцов пористой среды.

Методы исследования. Аналитические исследования проводились с использованием методов математической физики. Широко использовался метод вычислительного эксперимента на ПЭВМ.

Достоверность предложенных математических моделей обусловлена корректным применением методов математической физики, законами сохранения механики многофазных систем и их физической и математической непротиворечивостью, сравнением результатов численных расчетов с аналитическими решениями для тестовых задач и экспериментальными данными в частных случаях.

Личный вклад автора.

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, представлялись и обсуждались на научных семинарах: кафедры прикладной математики и информатики Бирской государственной педагогической академии (Бирск, 2006); кафедры математического моделирования Стерлитамакской государственной педагогической академии (Стерлитамак, 2006); Института механики УНЦ РАН (Уфа, 2006); отдела вычислительной математики Института математики УНЦ РАН (Уфа, 2006); лаборатории «Математического моделирования в физике» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (Москва, 2007), а также на следующих конференциях:

-Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2004);

-Всероссийская научная конференция молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации" (Новосибирск, 2004);

-Международная конференция «Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья» (Москва, 2004);

-Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2005);

-Шестой Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (Сочи-Дагомыс, 2005);

-IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006).

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Диссертационная работа выполнялась в рамках тематического плана НИР Минобразования и науки РФ 2003-2005 гг. (№ госрегистрации НИР 01200310563) и при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-97-909).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, 3-х глав, заключения и списка литературы из 79 наименований. Общий объем работы составляет 115 страниц, в том числе 26 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор литературы по теме диссертации, кратко изложено содержание работы и сформулированы результаты, выносимые на защиту.

В первой главе рассматривается краевая задача с нестационарным граничным условием, моделирующая неравновесное вытеснение двухфазной жидкости в образце пористой среды.

В пункте 1.1 первой главы обсуждается математическая постановка задачи.

Математическая модель неравновесной двухфазной фильтрации описывается в рамках модели Г. И. Баренблатта уравнениями вида:

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+div\vec{\upsilon}_1=0;\quad -m\frac{\partial s}{\partial t}+div\vec{\upsilon}_2=0;$$
$$\vec{\upsilon}_1=-\frac{kf_1(\tilde{s})}{\mu_1}gradp_1;\vec{\upsilon}_2=-\frac{kf_2(\tilde{s})}{\mu_2}gradp_2; \tag{1}$$
$$\tilde{s}-s=\tau\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Здесь индекс “1” относится к смачивающей фазе, индекс “2” – к несмачивающей; k – абсолютная проницаемость пористой среды; m – пористость; $f_i(\tilde{s})$ – относительные фазовые проницаемости (ОФП); $\vec{\upsilon}_i$ – фазовые скорости; p_i – фазовые давления; μ_i – вязкости фаз.

Капиллярным скачком давления в фазах пренебрегаем, считая, что влияние неравновесности превосходит влияние капиллярного давления.

Используя безразмерные переменные: $\theta={\upsilon_0 t}/{ml}$ – безразмерное время, равное отношению объема закачанной жидкости к объему пор, $\xi={x}/{l}$, - безразмерная пространственная координата, $\bar{\tau}={\tau\upsilon_0}/{ml}$ – безразмерный параметр неравновесности (в дальнейшем черточки опускаются), уравнения (1) для нахождения насыщенности смачивающей фазы $s(\xi,\theta)$ приводятся к виду:

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}+\frac{\partial F(\tilde{s})}{\partial\xi}=0,\qquad \tilde{s}=s+\tau\frac{\partial s}{\partial\theta}, \tag{2}$$

где $F(\tilde{s})$ – функция, определяющая долю смачивающей фазы в общем фильтрационном потоке.

В данной работе предлагается дополнить начальное условие нестационарным граничным условием следующего вида:

$$s(\xi,0)=s_0,\ \tilde{s}(0,\theta)=s_k, \tag{3}$$

где s_0 и s_k – начальная и конечная (предельная) насыщенности пористой среды смачивающей фазой ($s_k>s_0$).

Система (2), (3) моделирует, например, процесс вытеснения нефти из образца пористой среды при постоянном расходе закачиваемой воды на входном сечении *$\xi=0$.* В рамках подходов, предложенных Г. И. Баренблаттом, предполагается, что эффекты релаксации вызваны наличием областей резкого изменения функции насыщенности смачивающей фазы *$s(\xi,\theta)$*. Система «Пористая среда – одна из компонент жидкости» рассматривается как некоторая единая пористая среда, в которой происходит фильтрация другой компоненты. Как следствие этой гипотезы можно записать выражения основного закона фильтрации – закона Дарси – для каждой из компонент. Функции ОФП в неравновесном потоке несмешивающихся жидкостей в пористой среде считаются теми же, что и в равновесном, то есть являются функциями только насыщенности, но зависят не от истинной насыщенности s, а от некоторой эффективной насыщенности $\tilde{s}$. Разность функций $\tilde{s}(\xi,\theta)$ и $s(\xi,\theta)$ в данной точке зависит только от локальной скорости изменения насыщенности $s_\theta(\xi,\theta)$ и характерного времени замещения τ.

Задача (2), (3) для определения неизвестной функции $s = s(\xi,\theta)$ преобразована к виду:

$$\frac{\partial s}{\partial\theta} = \frac{1}{\tau}\left(\tilde{s}-s\right),\ \frac{\partial\tilde{s}}{\partial\xi} = \frac{1}{\tau F'\left(\tilde{s}\right)}\left(s-\tilde{s}\right), \tag{4}$$

$$s(\xi,0) = s_0,\ \tilde{s}(0,\theta) = s_k.$$

В пункте 1.2 проведены априорные оценки для функций s и $\tilde{s}$:

$$s^2(\xi,\theta) \le \left[s_0^2 + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right)\right]e^{-\frac{\theta}{\tau}+\frac{\theta\xi}{\tau^2\alpha}}.$$

$$\tilde{s}^2(\xi,\theta) \le \left\{s_k^2 + \frac{\tau\beta}{(\tau\alpha+\beta\theta)}\left[s_0^2 + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right)\right]\left[e^{\xi\left(\frac{1}{\tau\beta}+\frac{\theta}{\tau^2\alpha}\right)} - 1\right]e^{-\frac{\theta}{\tau}}\right\}e^{-\frac{\xi}{\tau\beta}}.$$

Полученные неравенства позволяют установить корректность постановки краевой задачи (4). Кроме этого, эти оценки могут быть применены, например, при исследовании поведения решения для больших значений времени релаксации τ .

В пункте 1.3 получены условия, при которых задача (4) имеет гладкое решение.

Краевая задача (4) эквивалентна системе интегральных уравнений вида:

$$\begin{aligned} s(\xi,\theta) &= s_0 + \frac{1}{\tau}\int_0^\theta\left[\tilde{s}(\xi,\eta) - s(\xi,\eta)\right]d\eta, \\ \tilde{s}(\xi,\theta) &= s_k + \frac{1}{\tau}\int_0^\xi \frac{1}{F'\left(\tilde{s}(\eta,\theta)\right)}\left[s(\eta,\theta) - \tilde{s}(\eta,\theta)\right]d\eta, \end{aligned} \tag{5}$$

с помощью которой построены последовательные приближения:

$$\overset{(n+1)}{s}(\xi,\theta)=s_0+\frac{1}{\tau}\int_0^{\theta}\left[\overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\eta)-\overset{(n)}{s}(\xi,\eta)\right]d\eta,$$

$$\overset{(n+1)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)=s_k+\frac{1}{\tau}\int_0^{\xi}\frac{1}{F'\left(\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right)}\left[\overset{(n)}{s}(\eta,\theta)-\overset{(n)}{\tilde{s}}(\eta,\theta)\right]d\eta. \qquad (5`)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть производная функции $F(s)$ не обращается в нуль на любом интервале $(-a;\,a)$:

$$|F'(s)|\geq \mathrm{A}>0,$$

и постоянная A не зависит от a. Тогда в прямоугольнике $0\leq\xi\leq\xi_0$, $0\leq\theta\leq\theta_0$, где $\theta_0<\frac{\tau}{2}$, $\xi_0<\frac{\tau\mathrm{A}}{2}$ для последовательных приближений (5`) справедливы оценки:

$$\left|\overset{(n)}{s}(\xi,\theta)\right|\leq M,\quad \left|\overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\theta)\right|\leq M,\quad n=0,1,2,\ldots\,.$$

Здесь постоянная M определяется так:

$$M=\max\left\{\frac{s_0\tau}{\tau-2\theta_0},\ \frac{s_k\tau\mathrm{A}}{\tau\mathrm{A}-2\xi_0},\ s_0+\frac{(s_k-s_0)}{\tau}\theta_0,\ s_k+\frac{(s_k-s_0)\xi_0}{\tau\mathrm{A}}\right\}.$$

С использованием леммы доказывается теорема существования и единственности решения задачи (4).

Теорема. Пусть выполнены условия:

$$|F'(s)|\geq A>0,\qquad |F''(s)|\leq B,\qquad s\in[-M,M].$$

Тогда в прямоугольнике $0\leq\xi\leq\xi_0$, $0\leq\theta\leq\theta_0$ существует единственное решение системы интегральных уравнений (5).

Теорема доказывалась методом последовательных приближений. Следует отметить, что теорема справедлива в случае, когда граничные условия являются гладкими функциями.

В пункте 1.4 построены приближенно-аналитические, а также численные решения для краевой задачи (4).

Если функция *F(s)* имеет линейный вид:

$$F(s)=As+B,\ A>0,$$

приходим к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}=\frac{1}{\tau}(\tilde{s}-s),\quad \frac{\partial\tilde{s}}{\partial\xi}=\frac{1}{\tau A}(s-\tilde{s}), \qquad (6)$$

$$s(\xi,0)=s_0,\quad \tilde{s}(0,\theta)=s(0,\theta)+\tau\frac{\partial s(0,\theta)}{\partial\theta}=s_k. \qquad (7)$$

Систему уравнений (6) с граничными условиями (7) можно свести к задачам типа Гурса для уравнения второго порядка гиперболического типа, линейного по старшим производным, для функций s и $\tilde{s}$, решение которых найдено классическим методом Римана:

$$s(\xi,\theta)=s_0+\left(s_k-s_0\right)\frac{\tau A}{\xi}\exp\left(-\frac{\xi}{\tau A}\right)\int\limits_0^{\frac{\xi\theta}{A\tau^2}} e^{-\eta\frac{\tau A}{\xi}} J_0\left(2\sqrt{\eta}\right)d\eta, \tag{8}$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta)=s_k+\frac{\tau}{\theta}\left(s_0-s_k\right)\exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right)\int\limits_0^{\frac{\xi\theta}{A\tau^2}} e^{-\eta\frac{\tau}{\theta}} J_0\left(2\sqrt{\eta}\right)d\eta . \tag{9}$$

Для решения (8), (9) построены асимптотические представления в области $\xi>0, \theta>0$ для различных значений времени релаксации τ.Полученные асимптотические представления позволяют оценить область значения решения задачи (6), (7). Так как $\xi\in[0;1]$, параметр A и время релаксации τ ограничены, тогда асимптотическое разложение решения при $\theta\to\infty$ в области $\xi<\mathrm{A}\theta$ имеет вид:

$$s\left(\xi,\theta\right)=s_k+\left(s_0-s_k\right)\frac{e^{-\left(\sqrt{\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}}-\sqrt{\frac{\theta}{\tau}}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\left(\tau^2\frac{\mathrm{A}}{\xi}\right)^{1/4}}{1-\left(\frac{\xi}{\mathrm{A}\theta}\right)^{1/2}}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{1/4}+O\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)^{3/4}\right)\right],$$

$$\tilde{s}\left(\xi,\theta\right)=s_k+\left(s_0-s_k\right)\frac{e^{-\left(\sqrt{\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}}-\sqrt{\frac{\theta}{\tau}}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{\left(\frac{\xi\tau^2}{\mathrm{A}}\right)^{1/4}}{1-\left(\frac{\xi}{\mathrm{A}\theta}\right)^{1/2}}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{3/4}+O\left(\left(\frac{1}{\theta}\right)^{5/4}\right)\right].$$

В случае $\theta\to 0$ асимптотическое представление решения имеет вид

$$s\left(\xi,\theta\right)=s_k+\left(s_0-s_k\right)\left[1-e^{-\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}}+e^{-\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}-\frac{\theta}{\tau}}\left(1-O\left(\theta\right)\right)\right],$$

$$\tilde{s}\left(\xi,\theta\right)=s_k+\left(s_0-s_k\right)\left[1-e^{-\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}}-e^{-\frac{\xi}{\tau\mathrm{A}}-\frac{\theta}{\tau}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\xi\theta}{\tau\mathrm{A}}\right)^k\frac{1}{\left(k!\right)^2}+O\left(\theta\right)\right)\right)\right].$$

Таким образом, исходя из полученных представлений видно, что $\lim_{\theta\to 0} s(\xi,\theta) = s_0$, $\lim_{\theta\to\infty} s(\xi,\theta) = s_k$, то есть искомая функция ограничена в области $[s_0; s_k]$, что согласуется с физической моделью.

Полученные решения позволяют сделать вывод об устойчивости краевой задачи. При малых возмущениях граничных условий изменение решения также мало.

В общем случае решение ищется в виде ряда:

$$s(\xi,\theta,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \overset{(n)}{s}(\xi,\theta,\tau), \quad \tilde{s}(\xi,\theta,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \overset{(n)}{\tilde{s}}(\xi,\theta,\tau).$$

Предполагается, что время релаксации τ мало. Подстановкой в исходные уравнения (4), для каждого члена ряда строится своя краевая задача. В результате определена цепочка краевых задач, решение каждой из которых зависит от предыдущей. Показано, что задача в общем случае, решение которой определяется первыми двумя членами ряда, совпадает с задачей в линейном случае. Таким образом, решение задачи (4) в первом приближении найдено. Для нахождения третьего члена ряда краевая задача сводится к задаче типа Гурса. Решение построено в явном виде методом Римана. Показана его ограниченность по параметру τ.

В пункте 1.5 предложен численный алгоритм расчета задачи неравновесной двухфазной фильтрации в общем случае, апробированный на точном решении для линейной задачи (6),(7). Соответствующие результаты приведены на рис.1.

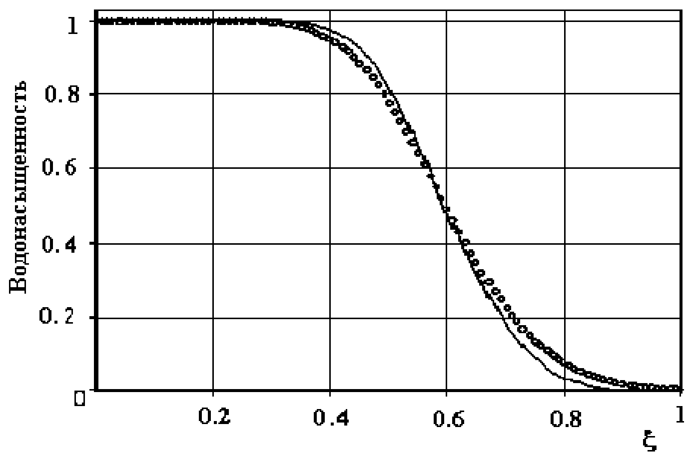


Рис. 1. Численное и аналитическое решения задачи при θ=0,5, $\tau = 0{,}01$:
— - аналитическое решение; ○ - численное решение

Пусть известно распределение насыщенности s в момент времени t. Переход на момент времени $t+\Delta t$ будем осуществлять в два этапа. На первом этапе, используя s^n в качестве начальных данных, определяем $s^{n+\frac{1}{2}}$ как решение уравнения

$$\frac{s_i^{n+\frac{1}{2}} - s_i^n}{\Delta t} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 .$$

На втором этапе полученное $s^{n+\frac{1}{2}}$ используется в качестве начальных данных при определении s^{n+1} из уравнения

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{\tau}{\Delta x}\left(F_i'^n \quad \frac{s_i^{n+1} - s_i^{n+1/2}}{\Delta t} - F_{i-1}'^n \quad \frac{s_{i-1}^{n+1} - s_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta t} \right) = 0 .$$

Предложенная схема устойчива при условии $\dfrac{\Delta t \max\left|F'(s)\right|}{\Delta x} < 1$.

В рамках численного эксперимента рассчитаны распределения водонасыщенности в образце пористой среды при различных значениях параметра релаксации τ. Расчетные зависимости качественно сравнивались с данными натурных экспериментов. Качественный анализ расчетных и экспериментальных функций водонасыщенности доказывает адекватность исследуемой модели.

Вторая глава посвящена разработке и исследованию математической модели фильтрации газожидкостной смеси в переходных условиях (фильтрация при давлении ниже давления насыщения) и вызванные этим релаксационные эффекты. Рассматривается образец пористой среды, насыщенный однородной жидкостью. Первоначально в каждой точке поддерживается постоянное давление выше давления насыщения. Затем на выходе образца давление понижают до значения ниже давления насыщения, а на входе – за счет постоянного притока жидкости – давление поддерживается постоянным.

В пункте 2.1 представлена постановка задачи. Предлагается релаксационная математическая модель изотермической нестационарной фильтрации газированной жидкости в рамках теории многофазной многокомпонентной фильтрации:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-s)(1-g)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-g) f_1(s) \frac{\partial p}{\partial x}\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[g(1-s) + \rho_2 s\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(g f_1(s) + f_2(s)\frac{\rho_2}{\mu_0}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right].$$

Приведенные уравнения выписаны для двух фаз (1 – жидкая, 2 – газовая) и двух компонент (1 – жидкость, 2 – газ). Здесь $s(x,t)$ – газонасыщенность, $g(x,t)$ – массовая концентрация растворенного газа в жидкой фазе, $p(x,t)$ – давление, функция $f_i(s)$ – относительная проницаемость для i-й фазы, μ_0 – отношение вязкости газа к вязкости жидкости. Газ считается идеальным, поэтому его плотность определяется по линейному закону: $\rho_2 = \rho_0\, p$.

Для определения функции $g(x,t)$ предлагается релаксационное уравнение. Предполагается, что фазовые переходы имеют неравновесный характер. Обоснованием такого предположения являются, в частности, исследования Д. А. Эфроса, в которых отмечалось заметное запаздывание в выделении газа. Зависимость массовой концентрации растворенного газа от давления описывается релаксационной моделью вида:

$$g + \tau \frac{dg}{dt} = g_e(p),$$

где $\frac{dg}{dt}$ – субстанциональная производная, $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial g}{\partial x}$. υ_1 – скорость фильтрации нефти, τ – время релаксации, $g_e = \alpha p$, $\alpha = \mathrm{const}$, $g_e(p)$ – равновесная фазовая концентрация.

Начальные и граничные условия заданы в виде:

$$t = 0,\ x > 0,\ p = p_0,\ g = g_e^0 = \mathrm{const},$$
$$t > 0,\ x = 0,\ p = p_0 > p_s,\ s = 0,$$
$$t > 0,\ x = L,\ p = p_k < p_s.$$

Экспериментальные исследования поставленной задачи указывают на аномальное увеличение расхода газированной жидкости в области давления насыщения, и уменьшение его при дальнейшем снижении уровня давления (А. Х. Мирзаджанзаде). Анализ диаграмм изменения газонасыщенности s во времени указывает на частые колебания ее в отдельных сечениях образца пористой среды (В. Н. Мартос).

Для объяснения указанных эффектов в представленной работе развивается подход, основанный на эффекте “проскальзывания” жидкости за счет адсорбции микрозародышей газа на стенках пор (А. Х. Мирзаджанзаде, В. Ш. Шагапов). Предполагается, что функция $f_1(s)$ – относительная фазовая проницаемость (ОФП) жидкой фазы – имеет немонотонный вид и может принимать значения больше 1 (рис. 2).

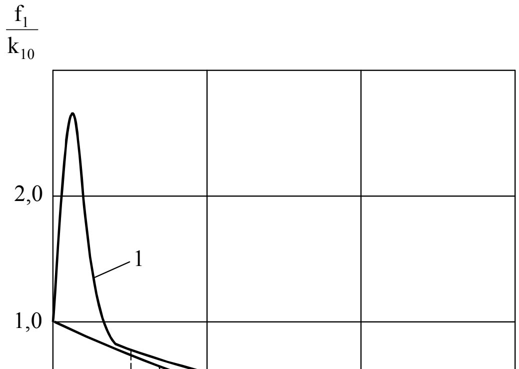


Рис.2. Немонотонная ОФП жидкой фазы:
1 – расчетная; 2 – по Викову-Ботсету

В пункте 2.2 проведен линейный анализ устойчивости стационарных режимов фильтрации газированной жидкости с учётом немонотонности функции фазовой проницаемости жидкой фазы.

Уравнения нестационарной фильтрации линеаризуются на стационарном решении. Коэффициенты линеаризованных уравнений для возмущений вычисляются при стационарных решениях. Далее исследуются длинноволновые решения полученной системы с использованием идей метода Бубнова-Галеркина. Решения и коэффициенты уравнений разлагаются в ряд Фурье. Подставляя указанные разложения в систему линеаризованных уравнений, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда Фурье. Из соображений сходимости ряда Фурье можно рассмотреть ограниченную систему ОДУ. Крайнее упрощение этой системы состоит в отбрасывании всех гармоник, кроме нулевых. Такой подход соответствует решениям, медленно меняющимся по пространственной координате *x*, т.е. длинноволновым возмущениям. В результате получается упрощенная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d_t \begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_o \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы A, зависящие от стационарных решений, вычисляются как средние от стационарного состояния $s_0(t), p_0(t), g_0(t)$– нулевая гармоника.

Решение ищется в виде

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ p_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \exp(\lambda t).$$

Исследование характеристического уравнения показало, что алгебраическое уравнение всегда имеет три действительных корня. Число нулей в правой полуплоскости определяется значениями параметров: $\Delta p = p_s - p_k$, μ_0, τ. В рассматриваемом нами диапазоне изменения параметра Δp линейная задача оказывается всегда неустойчивой. Дело в том, что при этих условиях уравнение на λ имеет хотя бы один положительный корень. Более того, при увеличении значений параметров Δp и τ наблюдается рост всех корней с переходом их через нуль, т.е. рост инкремента неустойчивости.

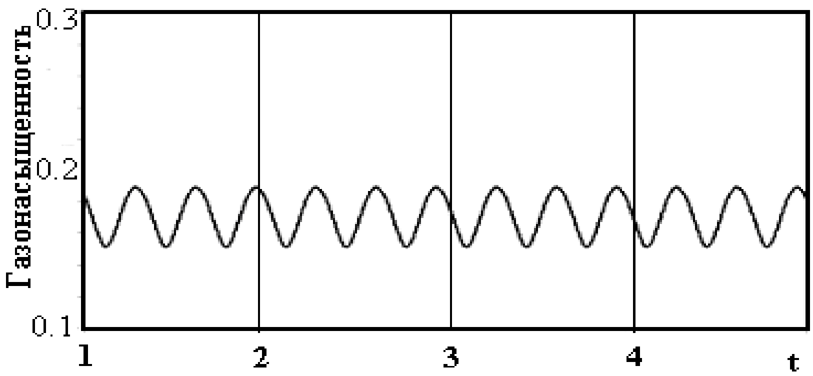
Такой вывод справедлив и для полной линеаризованной системы, по крайней мере, для решений с достаточно малыми Фурье-амплитудами $s_k, p_k, g_k (k \neq 0)$. Неустойчивость линейного приближения свидетельствует о неустойчивости рассматриваемого положения равновесия $s^0, p^0, g^0(x)$. Таким образом, при фильтрации газожидкостной смеси возможно возникновение автоколебаний и их усложнение при изменении указанных выше значений параметров.

В пункте 2.3 представлено описание количественных характеристик апериодических колебательных процессов: корреляционный интеграл, корреляционная размерность, а также процедура их вычисления (процедура Паккарда-Такенса). Данные величины являются критерием хаоса и позволяют определить возможность воссоздания сигнала с помощью динамической системы.

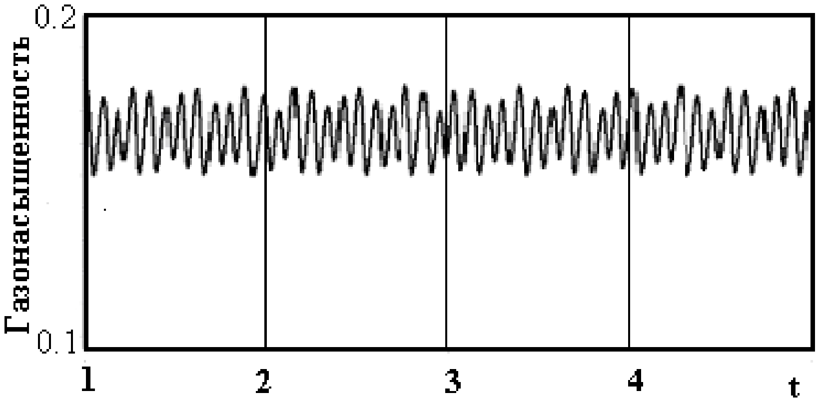
В пункте 2.4 представлен алгоритм расчета, разностные схемы, проводится численный анализ полученного решения рассматриваемой задачи.

Алгоритм численного расчета аналогичен IMPES методу – методу разделения по физическим процессам. Расчет давления проводился по неявной четырехточечной схеме. Для аппроксимации массовой концентрации применялась специальная разностная схема, учитывающая наличие малого параметра. На основе консервативной конечно-разностной схемы сквозного счета рассчитана газонасыщенность. Исследование устойчивости и сходимости численных схем проводилось на сгущающихся сетках.

Вычислительный эксперимент показал, что при определённых значениях параметров (отношения вязкостей жидкой и газовой фаз, перепада давления, времени релаксации) в области фильтрации газированной жидкости возникают периодические во времени изменения давления и насыщенности. Соответствующие результаты приведены на рис. 3.



а



б

Рис. 3. Зависимость газонасыщенности от времени на выходе модели:
а – $\Delta p = 3МПа; \tau = 0{,}01; \mu_0 = 0{,}01$; б – $\Delta p = 5МПа; \tau = 1; \mu_0 = 0{,}001$

Изменение этих параметров приводит к потере устойчивости предельного цикла и возникновению квазипериодического движения, переходящего затем в хаотическое (рис. 4). Применение процедуры Паккарда-Такенса показывает, что наблюдаемый хаос является детерминированным, и минимальное число динамических переменных, необходимых для описания колебаний в фильтрационном потоке, равно трём.

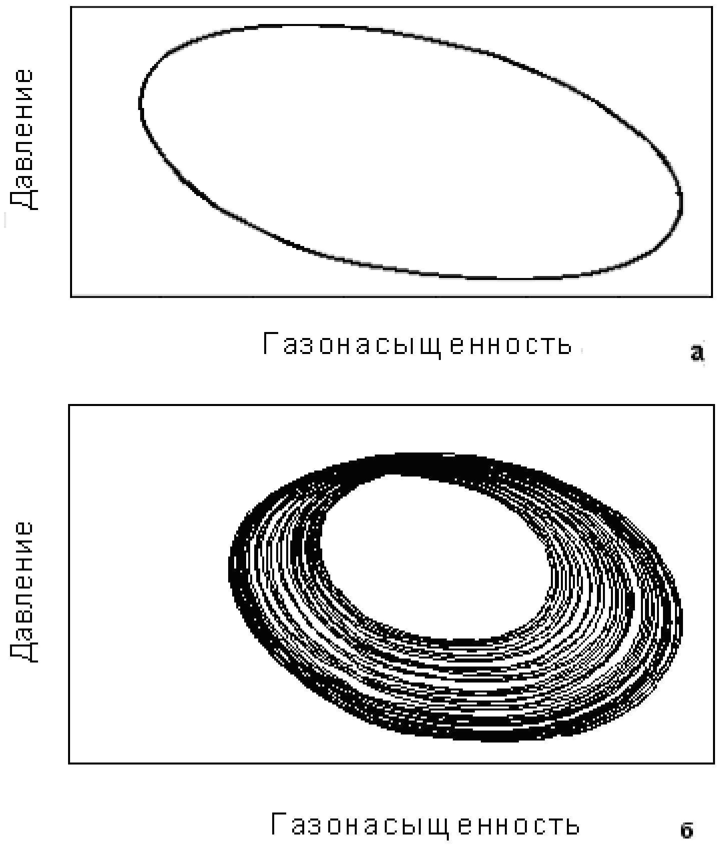


Рис.4. Усложнение фазовой траектории в плоскости (p s):
а – $\Delta p = 3МПа; \tau = 0{,}01; \mu_0 = 0{,}01$; б – $\Delta p = 5МПа; \tau = 1; \mu_0 = 0{,}001$

В третьей главе обобщаются полученные теоретические разработки в более общем случае. На практике структура фильтрационного потока усложняется наличием в системе третьей фазы – воды. Задача третьей главы исследовать влияние водонасыщенности на структуру фильтрационного потока газожидкостной системы в переходных условиях. Первоначально рассматривается фильтрация двухфазной жидкости в образце пористой среды. В каждой точке поддерживается давление выше давления насыщения. Затем на выходе из образца давление понижают до значения ниже давления насыщения, а на входе, за счет постоянного притока двухфазной жидкости, давление поддерживается постоянным. В результате происходит переход растворенного газа в свободное состояние и возникает область трехфазного течения. Считается, что газ растворен только в одной из фаз, растворимость в другой фазе пренебрегается.

В пункте 3.1 описывается постановка задачи. Математическая модель трехфазной фильтрации представляется в рамках теории многофазной многокомпонентной фильтрации:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[s_1(1-g)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(1-g)\frac{\partial p}{\partial x}\right];\ \frac{\partial}{\partial t}\left[s_1 g+\rho_2 s_2\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(gf_1+\frac{\rho_2}{\mu_0}f_2\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right];$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f_3}{\mu_{01}}\frac{\partial p}{\partial x}\right];\qquad g+\tau\frac{dg}{dt}=g_e(p).$$

Начальные и граничные условия заданы следующим образом:

$$t=0,\ x>0;\ \ p=p_0;\ \ g=g_e^0=\text{const};\ s_3=s_3^0;$$

$$t>0,\ x=0;\ \ p=p_0>p_s;\ \ s_2=0;\ \ s_3=s_3^0;\ \ x=L;\ \ p=p_k<p_s.$$

Обозначения в представленной модели аналогичны второй главе. При моделировании исследуемого процесса в качестве третьей фазы, в которой не учитывается растворимость газа, рассматривалась вода.

В пункте 3.2 обсуждается вид и зависимость функций $f_1(s_2,s_3)$, $f_2(s_2)$, $f_3(s_3)$ – функций относительной проницаемости каждой из фаз. По методике Стоуна построена функция проницаемости $f_1(s_2,s_3)$ немонотонного вида для газированной жидкости. Немонотонность учитывает эффект “проскальзывания” газожидкостной смеси за счет адсорбции микрозародышей газа на стенках пор в случае трехфазной фильтрации.

В пункте 3.3 представлены разностные схемы расчета, проведен численный анализ решения задачи, исследование устойчивости и сходимости численных схем проводилось на сгущающихся сетках. Расчеты показали, что в области разгазирования возникают периодические во времени изменения давления и газонасыщенности. Область устойчивости определяется несколькими параметрами: относительной вязкостью μ_0, перепадом давления $\Delta p=p_s-p_k$, времени релаксации τ и водонасыщенностью s_3. С ростом водонасыщенности наблюдается переход от сложных колебаний газонасыщенности до периодических движений (предельный цикл). Водная фаза оказывает влияние на амплитуду колебания. Сравнивая два временных ряда газонасыщенности, полученных при одних и тех же значениях параметров τ, μ_0, p, обнаруживается уменьшение амплитуды колебания при увеличении водонасыщенности s_3.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Обоснована корректность постановки задачи неравновесной двухфазной фильтрации с краевым нестационарным условием. Для линейной задачи получено точное решение и его асимптотические представления. В общем случае решение найдено в виде асимптотического функционального ряда. Предложен и протестирован на точном решении численный алгоритм расчета искомых функций, реализованный в виде программы в математическом пакете MAPLE. Вычислительным экспериментом установлено условие устойчивости предложенной разностной схемы.
2. Разработана и исследована математическая модель фильтрации газожидкостной смеси со сложными нелинейными и неравновесными свойствами, вызванными переходными условиями, в пористых средах. На основе разработанной модели реализована программа расчета гидродинамических функций в системе интегрированной разработки Delphi. Вычислительный эксперимент показал возникновение автоколебаний газонасыщенности и давления во времени в зависимости от перепада давления, вязкости жидкости, времени релаксации. Исследование на сгущающихся сетках показало устойчивость и сходимость используемых численных схем.
3. Вычислительный эксперимент, проведенный для краевой задачи, моделирующей процесс фильтрации трехфазной жидкости в переходных условиях, установил, что увеличение начальной водонасыщенности приводит к упрощению структуры колебаний функций газонасыщенности и давления от времени.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

публикация в издании, рекомендованном ВАК

1. Булгакова Г. Т., Жибер А. В., Файзулин Т. А. Математическое моделирование неравновесной двухфазной фильтрации // Математическое моделирование, 2006. Т. 18, № 10. С. 19 – 38.
2. Булгакова Г. Т., Жибер А. В., Файзулин Т. А. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Вестник УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2004. Т. 5, № 2(10). С. 52 – 57.
3. Булгакова Г.Т., Файзулин Т.А. Неравновесная фильтрация газированной жидкости // Вестник УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2005. Т. 6, № 2(13). С. 52 – 58.
4. Файзулин Т. А. Приближенно-аналитическое решение нелинейной задачи неравновесной двухфазной фильтрации // Вестник УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2005. Т. 6, № 2(13). С. 209 – 213.

публикация в научном сборнике

5. Файзулин Т. А. Точное решение краевой задачи для нелинейных уравнений двухфазной фильтрации // В кн. Актуальные проблемы математики. Математические методы современного естествознания. Уфа: УГАТУ, 2004. С. 234 – 241.

публикации в трудах международных конференций

6. Булгакова Г. Т., Файзулин Т. А. Численно-аналитические методы исследования двухфазной неравновесной фильтрации // Материалы международной конференции «Фундаментальные проблемы разработки нефтегазовых месторождений, добычи и транспортировки углеводородного сырья». М.: Изд-во Геос, 2004. С. 47.

публикации в трудах всероссийских конференций

7. Булгакова Г. Т., Файзулин Т. А. Моделирование неравновесной фильтрации трехфазной жидкости. // Материалы IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород: НГУ им. Лобачевского, 2006. Т. 2. С. 40.
8. Файзулин Т. А. Об одной модели неравновесной двухфазной фильтрации // Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». Новосибирск: НГТУ, 2004. Ч. 1. С. 136 – 138.
9. Файзулин Т. А. Метод Римана решения задачи Гурса для линейных уравнений неравновесной двухфазной фильтрации // Материалы Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 2004. Ч. 3. С. 221 – 223.

публикация в тезисах всероссийской конференции

10. Булгакова Г. Т. Жибер А. В Файзулин Т. А. Нелинейная задача неравновесной двухфазной фильтрации // Зимняя школа по механике сплошных сред (четырнадцатая). Тезисы докладов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. С. 46.

Файзулин Тимур Айратович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 22.03.2007.
Формат 60х84 1/16. Бумага офисная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. Л.1.0. Усл. кр-отт. 1,0. Уч. – изд. л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ №
ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный

технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа, ул. К. Маркса, 12