Общий начальный объем материала составил 829 условных единиц, конечный - 979,6. Таким образом при α_{cp}=I,453 приращение объема составило - I8,I%.

Текущие объемы определялись по случаю I . При заданной степени точности решение уложилось всего в три итерации.

В обоих примерах конструктивные ограничения не накладывались.

Литература

I. Хивинцев В.Н. К решению задачи с рациональным распределением материала в конструкции с учетом ограничений по перемещению.-В сб.: Автоматизация проектирования авиационных конструкций. Вып.I,Куйбышев, КуАИ,I979.

2. Иванова Е.А., Комаров В.А. Рациональное повышение жесткости крыльев. -В сб.: Оптимальное проектирование авиационных конструкций. Вып.I,Куйбышев,I973.

3. Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышевское книжное издательство.,I965.

УДК 629.7.02:539.52.00I.2

Ю.К. Сиразутдинов

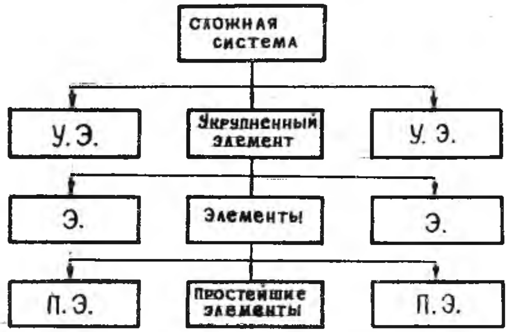
НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Автоматизация проектирования сложных инженерных конструкций ставит проблему отыскания метода их оптимизации.

В работе предлагается метод оптимизации сложных стержневых систем при условии рационального и более полного использования прочностных свойств материала. Сложная стержневая система при оптимизации разбивается на ряд уровней проектирования от простейших к более сложным элементам (рис.I).

Каждый уровень наделяется некоторой самостоятельностью в управлении процессом проектирования оптимальных систем в смысле выбора управляющих функций, фазовых координат, критериев оптимальности и методов оптимизации.

Количество уровней зависит от ряда факторов, например, от типа



Р и с.1.Последовательные разбиения сложной системы на более простые элементы

решаемых задач, метода решения, требуемой точности и оказывает существенное влияние на время(стоимость),затрачиваемое для проектирования стержневой системы. Поэтому выбор количества уровней может быть поставлен как самостоятельная проблема со своими варьируемыми параметрами, критерием оптимальности, методом оптимизации. При этом общая затрата на проектирование должна быть минимальной, точность расчета не меньше заданной и т.д. Таким образом, выбор количества уровней рассматривается как иной,более высокий, иерархический уровень при проектировании сложных стержневых систем.

Если возможно аналитическое решение задачи, то при определении количества уровней немаловажную роль играет возможность получения аналитического решения задачи во всех рассматриваемых уровнях или в как можно большем количестве уровней. При этом, как правило, количество уровней увеличивается и, следовательно, усложняется связь между уровнями (т.е. усложняется структура системы),но решение ,и особенно исследование полученного решения, на каждом уровне оказываются достаточно простыми и полными. Это приводит к уменьшению полной затраты на проектирование конструкции, так как на каждом уровне получаем более полную картину влияния параметров на критерий качества и может быть анализирована проблема глобального экстремума на данном уровне.

Если рассматривается более сложная задача, то количество уровней может быть определено из условия возможности получения решения задачи вообще или (при использовании данных вычислительных средств) получении решения при минимальных затратах машинного времени.

Связь между уровнями осуществляется сравнительно просто, когда за критерий качества самого верхнего уровня принят объем или вес системы. При этом критерии различных уровней совпадают по смыслу и характеру влияния на рациональность системы, т.е. критерий качества верхнего уровня совпадает тождественно или имеет однозначное соответствие с критериями всех нижних уровней. Но если в качестве критерия верхнего уровня принята стоимость , то сечение с наименьшей площадью или элемент с наименьшим объемом (весом) не будет одновременно и наименьшим по стоимости. Поэтому потребуется сравнить различные варианты проектирования конструкций. Например, при проектировании изгибаемых конструкций потребуется сравнивать конструкции наименьшего объема (веса) с постоянным, ступенчатым, переменным вдоль оси сечением, с учетом и без учета работы материала в пластической области и т.д. Таким образом, в данном случае критерий качества верхнего уровня не совпадает тождественно или не имеет однозначного соответствия с критериями нижних уровней. Заметим, что и в том случае когда каждый элемент конструкции имеет наименьшую стоимость, далеко не всегда конструкция, полученная из этих элементов, имеет наименьшую стоимость. Например, конструкция с однотипными элементами оказывается экономически более выгодной, чем конструкция с множеством типов элементов, каждая из которых хотя и имеет минимальную стоимость.

Каждый иерархический уровень проектирования имеет и самостоятельное практическое значение. Например, если элементы конструкции подвержены изгибу, кручению, то на первом уровне можно рассматривать оптимизацию сечения,и полученные результаты на этом уровне могут быть использованы не только при оптимизации в последующих уровнях (при проектировании элементов или самой конструкции),но и при разработке новых сортаментов прокатных изделий и т.д. Поэтому детальная разработка каждого уровня является важнейшей задачей.

Рассмотрим случай, когда на первом иерархическом уровне оптимизируется поперечное сечение. За критерий качества примем площадь поперечного сечения или наиболее полное использование прочностных свойств материала в каждой точке, т.е. равнопрочность сечения. Задача проектирования рационального сечения может быть приведена к отысканию таких переменных, характеризующих форму сечения (высоты,ширины и т.д.), которые доставляют минимум площади его при заданном сечении момента сопротивления или момента инерции при изгибе,кручении и т.д.

эта задача решается методом множителей Лагранжа.

Например, для отыскания размеров сечения с максимальным моментом инерции J_z при заданном значении площади поперечного сечения F составляем функцию Лагранжа $F^* = F + \lambda J_z$. Приравняв первые производные F^* по варьируемым параметрам нулю, получаем формулы для определения формы и размеров сечения. При заданных относительных толщинах полок α и стенок β двутаврового или коробчатого сечения решение задачи запишем:

$$(6\alpha^2+2\alpha^3\beta)\omega^4+(12\alpha-2\alpha^2\beta-2\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta\omega^2- \\ -(4\beta+6\alpha\beta^2)\omega-2\beta=0, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\omega = B/H$, т.е. равно отношению ширины (B) к высоте (H). Приближенное решение (I) при малых относительных толщинах полок и стенок ($\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$) получим в виде

$$\omega=\sqrt{\beta/3\alpha}-(\beta-5\alpha\beta\sqrt{\beta/3\alpha})/(6-6\alpha\sqrt{\beta/3\alpha}). \qquad (2)$$

Отыскание наиболее прочного сечения приводится в работе [I] . Случай, когда за критерий качества принято наиболее полное использование прочностных свойств материала в каждой точке сечения, т.е. проектирование равнопрочного сечения, рассмотрен в работе [2] .

При проектировании на более высоких иерархических уровнях (при оптимизации элементов, укрупненных элементов или самих конструкций) функционал, определяющий критерий качества, представляет собой объем (вес), стоимость конструкций или перемещение характерных ее точек. Управляющими параметрами могут быть функции $h_r(x)$, характеризующие изменение формы и размеров сечений вдоль оси конструкции. Фазовыми координатами принимается изменение напряжений $\sigma(x) \in H_\sigma$, деформаций $\varepsilon(x) \in H_\varepsilon$ в характерных или во всех точках сечения вдоль оси конструкций, перемещения заданных точек $y_i(x) \in H_y$ и т.д. Здесь $H_\sigma, H_\varepsilon, H_y$ – допустимая область изменения фазовых координат. При этих условиях решается задача отыскания управляющих параметров в допустимой области $h_r(x) \in H_h$, доставляющих экстремум критерию качества.

В зависимости от характера накладываемых ограничений задача может быть решена методом классического вариационного исчисления, градиентного спуска или методом, предложенным в работе [3] .

При отсутствии ограничений или при ограничениях, наложенных в виде равенства, задача решается методом классического вариационного исчисления. Так, например, рациональные формы конструкций из условия прочности получены в работах [4], [5] и в некоторых других. Некоторые вопросы отыскания оптимальных размеров конструкций из условия жесткости рассмотрены в работах [6], [7].

Задача отыскания наиболее жестких элементов может быть поставлена следующим образом.

Требуется отыскать такую вектор-функцию $h(x)$, которая минимизировала бы объем(вес) системы

$$V = \int_{(\ell)} F\left[h(x)\right] dx \to min \qquad (3)$$

при заданном значении прогиба V_1 в характерном сечении ее

$$V_1 = \int_{(\ell)} \frac{MM_1}{EJ_z} dx = \Delta = const. \qquad (4)$$

Здесь Δ – заданное значение прогиба (допустимый прогиб), M – изгибающий момент от внешних сил, M_1 – момент от единичной силы, приложенной в точке, где вычисляется прогиб, E – модуль упругости первого рода, (ℓ) означает, что интеграл берется по всей длине стержневой системы. Поставленная задача равноценна отысканию минимума прогиба V_1 при заданном значении объема V. Таким образом эта задача приводит к изопериметрической задаче вариационного исчисления. Для решения задачи составляем функцию Лагранжа

$$F^* = F + \lambda \frac{MM_1}{EJ_z} . \qquad (5)$$

Решение задачи рассмотрим при одном варьируемом параметре H. Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial H} - \lambda \frac{MM_1}{EJ_z} \frac{\partial J}{\partial H} = 0 . \qquad (6)$$

Из формулы (6) определяем J_z и подставляем в выражения (4), что позволяет нам определить множитель Лагранжа λ. Подставив полученное значение λ в формулу (6), получаем интегральное уравнение для вычисления параметра H, доставляющего $min\ V$ при $V_1 = \Delta = const$ или $min\ V_1$ при $V = const$.

$$J(H) = \frac{1}{E\Delta} \left(\frac{\partial J/\partial H}{\partial F/\partial H}\right)^{1/2} (MM_1)^{1/2} \int_{(\ell)} \left(\frac{\partial F/\partial H}{\partial J/\partial H}\right)^{1/2} (MM_1)^{1/2} dx. \qquad (7)$$

В качестве примера рассмотрим коробчатое или двутавровое сечение с заданной относительной толщиной полок α и стенок β. Допустим, что варьируемый параметр - высота сечения H. Решение интегрального уравнения (7) получим в виде

$$H=\left[\frac{1}{\sqrt{KK_1}\,E\Delta}\right]^{1/4}\left[\int\limits_{(\ell)}\left(\frac{K_1}{K}\right)^{1/2}(MM_1)^{1/3}dx\right]^{1/4}(MM_1)^{1/6}, \qquad (8)$$

где $K=1/12\left[3\omega^2\alpha+\beta-3\omega^2\alpha^2-3\omega\alpha\beta-\omega^4\alpha^3+3\omega^2\alpha^2\beta-\omega^3\alpha^3\beta\right]$,

$K_1=\omega(1-\alpha\beta)$.

Здесь оптимальное отношение $\omega=B/H$ может быть вычислено по формуле (2). В этом случае ω, следовательно, и K, K_1 будут постоянными величинами вдоль оси бруса, тогда формула (8) упрощается

$$H=\left[\frac{1}{KE\Delta}\right]^{1/4}\left[\int\limits_{(\ell)}(MM_1)^{1/3}dx\right]^{1/4}(MM_1)^{1/6}. \qquad (9)$$

Оптимизация конструкций из условия прочности сводится к задаче вариационного исчисления с голономными связями, решение которых дано в работах [8], [9]. А решение задачи с ограничениями типа неравенства дано в работе [10].

В заключение отметим, что рассмотрено проектирование оптимальных стержневых систем как управление иерархически организованной структурой, при этом сложная система разбивается на ряд уровней. Оптимизация начинается с нижнего уровня. Полученные при этом примеры используются как рекомендация к принятию решения на более высоких уровнях иерархии. Окончательное принятие решения начинается с верхнего уровня. В качестве примера рассмотрено проектирование изгибаемых элементов на жесткость методом классического вариационного исчисления. Если на управляемые и фазовые координаты наложено большое количество ограничений в виде неравенств и нет уверенности в их совместности, то используется метод, предложенный в работе [3].

Литература

1. Сиразутдинов Ю.К. Об оптимальных двутавровых сечениях. Материалы научно-тех. конф. 1966 г. по строительной механике и строительным конструкциям. Казань, КИСИ, 1966, с.98-104.

2. Сиразутдинов Ю.К. О равнопрочном сечении балок. Труды КАИ. Вып.I68,I974,с.II-I8.

3. Богомолов А.И.,Сиразетдинов Т.К. К решению основных задач управления динамическими объектами.-В кн.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.:Наука,I975,с.62-66.

4. Ф и л и н А.П.,Г у р е в и ч Я.И. Применения вариационного исчисления к отысканию рациональной формы конструкций.-В сб.: Исследования по строительной механике.ЛИИЖТ, Вып.I90.,I962,с.I6I--I88.

5. Сиразутдинов Ю.К. О применении вариационного исчисления к расчету конструкций наименьшего объема.Труды КАИ, Вып.95.,I968, с I00-II0.

6. Barnett Ralph L., A.M. Asce. Minimum - Weigth Design of Beams for deflection, J. Engng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 87, N1, 1961.

7. А б р а г я н К.А. К теории балок минимального веса, расчеты на прочностьМ.,I962, вып.8 с.I36-I5I.

8. Сиразутдинов Ю.К. К расчету балок с учетом собственного веса. ИВУЗ " Строительство и архитектура"№II,I967,с.2I-30.

9. Сиразутдинов Ю.К. К расчету конструкций наименьшего объема. Труды КАИ,Вып.I0I,I968,с. I20-I27.

I0. Сиразутдинов Ю.К. Расчет конструкций наименьшего объема методом градиентного спуска. Труды КАИ, Вып.I72,I974,с.33-39.

УДК 629.7.539.3

Е.Г. Макеев, В.Г. Матвеев

ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В методе конечных элементов при получении матриц элемента (жесткости, нагрузок и т.д.) возникает проблема интегрирования степенных функций координат по области элемента [I] . В работах [2] и [3] приводятся значения интегралов при использовании простейших элементов: треугольника (3 узла) и тетраэдра (4 узла). Целью