

4. К о з л о в Д.М., К о м а р о в В.А. Исследование кольцевых дисков минимального объема.
Статья депонирована в ВИНТИ, № 646-74 Деп.
5. К о м а р о в В.А., С о л о в о в А.В. Конечный элемент для проектирования рациональных силовых схем конструкций типа крыла.
Статья депонирована в ВИНТИ, № 768-75 Деп.
6. К о м а р о в В.А., С о л о в о в А.В. Преобразование произвольных нагрузок к узловым силам в методе конечных элементов.—
В сб.: "Методы решения задач теории упругости и пластичности". Горьковский государственный университет, 1973, вып. 7, с. 131-136.

УДК 624.043.2:539.52.001.2

Ю.К. С и р а з у т д и н о в

К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ МАТЕРИАЛА

При решении физически нелинейных задач строительной механики особое место занимают вопросы наиболее точной и оптимальной аппроксимации нелинейной диаграммы упруго-пластичных материалов. Хотя таких зависимостей предложено множество, но они достаточно точно отражают действительную диаграмму растяжения только тогда, когда диаграмма разбита на участки и аппроксимирована на каждом участке в отдельности [1].

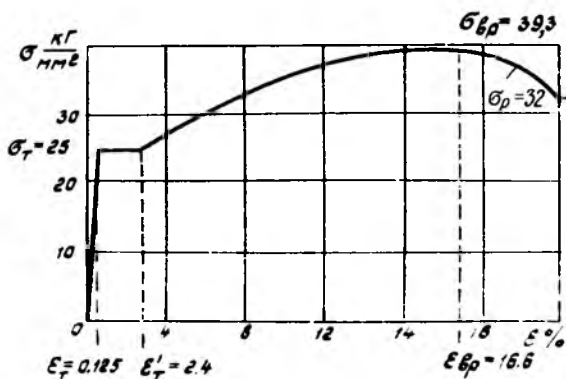
При использовании этих зависимостей необходимо заранее знать напряженно-деформированное состояние элемента конструкции, чтобы выбрать соответствующую σ (ϵ_c). Естественно применение их в практике расчета вызывает значительные трудности. Но установление действительной картины напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических деформациях и более полное использование прочностных свойств материала является одним из важных резервов снижения веса конструкции.

В данной работе предлагается единое аналитическое выражение

диаграммы растяжения при упруго-пластических деформациях материала и на основе ее единый метод расчета конструкций, работающих в упругой и пластической областях.

Для этого диаграмму растяжения разбиваем на несколько участков таким образом, чтобы на каждом участке сравнительно просто записывалось бы аналитическое выражение зависимости σ (ε). Но эта запись должна достаточно точно аппроксимировать действительную диаграмму растяжения материала. Например, диаграмму с площадкой текучести разбиваем на три участка: первый - упругий, где применим закон Гука; второй - охватывающий площадку текучести и третий, где учитывается упрочнение материала. Для объединения аналитических выражений различных участков в единую запись используем единично-прерывистую форму Ю.А. Радига [2].

Тогда аналитическое выражение диаграммы растяжения материала с хорошо выраженной площадкой текучести (рис. 1) можем представить в виде:



Р и с. 1

$$\sigma = \sigma_y E \bar{\Phi}(\varepsilon_T) + \sigma_T \Phi(\varepsilon_T) + f(\varepsilon) \Phi(\varepsilon'_T). \quad (1)$$

здесь $\bar{\Phi}(\varepsilon_T)$, $\Phi(\varepsilon_T)$, $\Phi(\varepsilon'_T)$ - единично-прерывистые функции, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\varepsilon_T) &= 0,5 \left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_T}{\varepsilon - \varepsilon_T} \right]; \\ \Phi(\varepsilon_T) &= 0,5 \left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_T}{\varepsilon - \varepsilon_T} \right]; \\ \Phi(\varepsilon'_T) &= 0,5 \left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon'_T}{\varepsilon - \varepsilon'_T} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_T и ε_T' - относительные деформации, соответствующие пределу текучести и началу упрочнения;

$f(\varepsilon)$ - функция, учитывающая упрочнение материала.

Учитывая, что кривая упрочнения получается экспериментальным путем, аналитическое выражение ее может быть получено методом наименьших квадратов. Часто достаточную точность получим, если эту кривую будем искать в виде $f(\varepsilon_T) = A_1(\varepsilon - \varepsilon_T) + A_2(\varepsilon - \varepsilon_T)^m$, где ε - полная деформация. Например, для указанной на рис. I диаграммы ($\varepsilon_T' = 0,024$) примем $m = 2$, тогда получим $A_1 = 186 \text{ кг/мм}^2$, $A_2 = -602 \text{ кг/мм}^2$.

При $0 < \varepsilon < \varepsilon_T$ в выражении (I) $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 1$; $\Phi(\varepsilon_T) = 0$; $\Phi(\varepsilon_T') = 0$ и тогда напряжение вычисляется согласно закону Гука $\sigma = \varepsilon E$. Когда $\varepsilon_T < \varepsilon < \varepsilon_T'$, тогда $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 0$, $\Phi(\varepsilon_T) = 1$, $\Phi(\varepsilon_T') = 0$ и следовательно, $\sigma = \sigma_T$. Если $\varepsilon_T' < \varepsilon < \varepsilon_{\delta p}$, то $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 0$, $\Phi(\varepsilon_T) = 1$, $\Phi(\varepsilon_T') = 1$ и напряжение вычисляется с учетом упрочнения $\sigma = \sigma_T + f(\varepsilon)$.

Из предложенной зависимости (I) как частные случаи, вытекают диаграммы растяжения упругого, идеально упруго-пластичного, идеально жестко-пластичного материала, а также материала без площадки текучести. Например, если $\varepsilon_T = \varepsilon_T'$, $\bar{\Phi}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon_T')$, то из выражения (I) получим запись аналитического выражения диаграммы растяжения материала без площадки текучести

$$\sigma = \varepsilon_y E \bar{\Phi}(\varepsilon_T) + [\sigma_T + f(\varepsilon)] \Phi(\varepsilon_T). \quad (I \text{ а})$$

Выражение (I) и (I а) устанавливает зависимость напряжения от деформации в упругой и пластической областях при активном нагружении. Заметим, что эти выражения могут быть использованы не только при активной деформации.

Для этого примем обычные допущения:

1. При разгрузке и последующем нагружении до точки, где началась разгрузка, зависимость $\sigma(\varepsilon)$ подчиняется закону Гука. При дальнейшем нагружении, когда уже достигнута точка начала разгрузки, диаграмма растяжения совпадает с диаграммой, полученной при активном нагружении.

2. В течении расчетного времени зависимость $\sigma(\varepsilon)$ пред-

полагается неизменной, т.е. явлением ползучести материала можно пренебречь.

Принятые допущения расширяют пределы применимости выражений (I) и (Ia). Теперь эти выражения справедливы и при нагружениях с разгрузками и даже при приложении силы обратного знака, если она не вызывает пластические деформации обратного знака. Составлена небольшая программа, позволяющая использовать эти зависимости при машинном проектировании:

$$\varepsilon_{nl} = 0; \varepsilon_m = \varepsilon_T; \varepsilon_y = \varepsilon - \varepsilon_{nl};$$

if $\varepsilon < \varepsilon_m$ then begin $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 1; \Phi(\varepsilon_T) = 0; \Phi(\varepsilon'_T) = 0;$

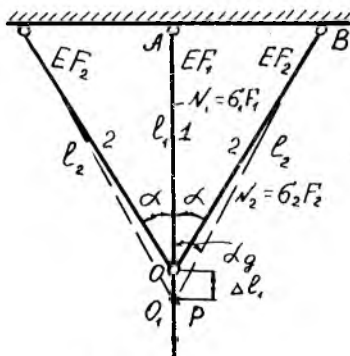
(1); go to M; end; else begin if $\varepsilon < \varepsilon'_T$ then begin $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 0; \Phi(\varepsilon_T) = 1; \Phi(\varepsilon'_T) = 0; \varepsilon_m = \varepsilon; end;$

else begin $\bar{\Phi}(\varepsilon_T) = 0; \Phi(\varepsilon_T) = 1; \Phi(\varepsilon'_T) = 1; \varepsilon_m = \varepsilon; end;$

(1); $\varepsilon_T = \sigma/E; \varepsilon_{nl} = \varepsilon - \varepsilon_T; go to M; end.$

Заметим, что выражения (I) и (I a) устанавливают зависимость σ (ε), но обратная зависимость ε (σ) не всегда может быть получена без учета фактора времени. Это обусловлено наличием площадки текучести в диаграмме.

На простейшем примере покажем преимущество предложенного метода. Рассмотрим стержневую систему из трех стержней, соединенных в узлах шарнирно (рис. 2). Допустим, что требуется вычислить величину силы P по заданной деформации ε первого (или второго) стержня, а также разрушающую силу $P_{раз}$. Диаграмма растяжения материала показана на рис. 1. При изменении величины ε (или соответственно P) получим различные зависимости $\sigma_1 = f_1(\varepsilon_1)$ и $\sigma_2 = f_2(\varepsilon_2)$ в элементах системы.



Р и с. 2

В нашем простейшем примере с учетом симметрии системы получим шесть возможных комбинаций напряженных состояний элементов

систем. Так например, в первой стадии работы, когда величина силы достаточно мала, все стержни будут испытывать упругие деформации, а во второй - средний стержень окажется в пластической, крайние - в упругой области и т.д. В последней стадии все стержни могут находиться в области упрочнения.

Таким образом, при расчете существующими методами [1], мы должны каждый раз устанавливать в которой из возможных комбинаций находятся элементы системы. Затем записать соответствующие зависимости $\sigma_1 = f_1(\varepsilon_1)$, $\sigma_2 = f_2(\varepsilon_2)$ и тогда вычислить N_1 , N_2 , а затем из условия статики - P . Замкнутого решения не имеем.

Теперь рассмотрим решение задачи при использовании предложенной зависимости. Пусть нам дана деформация ε_1 . Тогда с учетом выражения (1) и условия совместности деформаций $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha$ условие статики $P = N_1 + 2N_2 \cos \alpha$ представим в виде

$$\begin{aligned} P = & \varepsilon_1 E F_1 \bar{\Phi}_1(\varepsilon_T) + F_1 \sigma_T \Phi_1(\varepsilon_T) + f(\varepsilon) F_1 \Phi_1(\varepsilon') + \\ & + 2\varepsilon_1 E F_2 \bar{\Phi}_2(\varepsilon_T) \cos^2 \alpha + F_2 \sigma_T \Phi_2(\varepsilon_T) \cos \alpha + f(\varepsilon) F_2 \Phi_2(\varepsilon') \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Индексы в единично прерывистой форме (1) и (2) показывают к какому стержню относится $\Phi(\varepsilon_T)$, т.е. в выражении $\Phi_1(\varepsilon_T)$ вместо ε записываем деформацию первого стержня ε_1 , а в $\Phi_2(\varepsilon_T)$ соответственно ε_2 . Выражение (3) дает зависимость P от ε , при любом напряженно-деформированном состоянии системы. Причем, единично-прерывистые формы автоматически выбирают зависимости, соответствующие данному напряженно-деформированному состоянию элемента.

Пусть сила P достигает в рассматриваемой системе наибольшего значения ($P = P_{раз}$) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{вр}$. Тогда подставляя это значение ε_1 , в выражение (3) вычислим $P = P_{раз}$.

Иногда деформирование расчетной схемы вызывает значительное перераспределение усилий в системе. Это особенно заметно при больших пластических деформациях. При деформировании системы (рис.2) $tg \alpha_g = AB / (\ell_1 + \Delta \ell_1)$, а до деформации $tg \alpha = AB / \ell_1$. Тогда деформированный угол α_g вычислим из выражения $\alpha_g = \arccos(tg \alpha) / (1 + \varepsilon_1)$. Подставляя полученное значение угла α_g в выражение (3), получим величину силы P и $P_{раз}$, вычисленную по деформированной схеме.

Составлена программа для ЭЦВМ типа "Наири", которая позволяет по заданной ε_1 , вычислить действующую силу P и напряжения σ в каждом стержне по деформированной и недеформированной

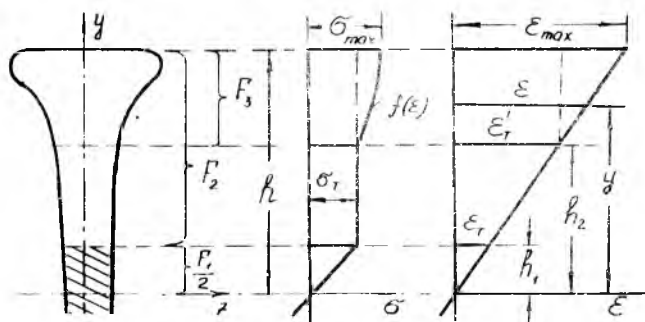
схеме, а также величину остаточных напряжений в стержнях системы при разгрузке. Вычисленные по этой программе величины разрушающих нагрузок системы (см. рис. 2) при $F_1 = F_2 = 10 \text{ см}^2$ приведены в таблице (P_y - величины разрушающих нагрузок, вычисленные без учета пластических свойств материала, $P_{\text{упл}}$ - в предположении идеально упруго-пластического материала и $P_{\text{суп}}$ с учетом упрочнения).

Т а б л и ц а

α	Схема расчета разрушающей нагрузки	P_y кг	$P_{\text{упл}}$ кг	$\frac{P_{\text{упл}}}{P_y}$	$P_{\text{суп}}$ кг	$\frac{P_{\text{суп}}}{P_y}$	$\frac{P_{\text{суп}}}{P_{\text{упл}}}$
10°	Без учета деформ. системы	72755	74240	1,02	116448	1,6	1,56
	В % увеличении	0,001	0,05		0,31		
	По деформ. схеме	72761	74275	1,02	116810	1,61	1,57
30°	Без учета деформ. системы	57475	68301	1,19	104402	1,82	1,53
	По деформ. схеме	57506	68554	1,19	107629	1,87	1,57
	В % увеличении	0,05	0,37		3,09		
45°	Без учета деформ. системы	42677	60355	1,41	87184	2,04	1,44
	По деформ. схеме	42710	60772	1,42	92767	2,17	1,53
	В % увеличении	0,08	0,69		10,91		
60°	Без учета деформ. системы	31250	50000	1,6	67343	2,15	1,35
	По деформ. схеме	31267	50445	1,61	72445	2,32	1,44
	В % увеличении	0,05	0,09		7,58		

В данном примере разрушающая нагрузка, вычисленная с учетом упрочнения материала в 1,6-2,3 выше, чем нагрузка P_y и примерно в 1,5 раза выше, чем нагрузка, вычисленная в предположении идеально упруго-пластичного материала. Расчет по деформированной схеме увеличивает $P_{раз}$ до 11% при больших пластических деформациях, а на P_y и $P_{уол}$ влияет пренебрежимо мало. Таким образом, решение поставленной задачи с использованием выражения (I) оказалось достаточно простым.

Далее рассмотрим использование предложенной зависимости (I) при расчете бруса на изгиб в пределах применимости гипотезы плоских сечений. Пусть сечение с высотой $2h$, верхняя половина которого показана на рис. 3, имеет две оси симметрии. Материал работает одинаково на растяжение и сжатие. Диаграмма растяжения его показана на рис. 1. Допустим, что задан радиус кривизны изогнутой оси ρ или задана наибольшая линейная деформация в сечении ϵ_{max} . Требуется вычислить изгибающий момент M и остаточные напряжения в сечении при разгрузке.



Р и с. 3

Зависимость между ρ и ϵ_{max} имеет вид $\epsilon_{max} = h/\rho$. В выражение момента внутренних сил $M = \int_F \sigma_y dF$ подставим значение σ из выражения (I):

$$M = \int_F \epsilon E \bar{\Phi}(\epsilon_T) y dF + \int_F \sigma_T \Phi(\epsilon_T) y dF + \int_F f(\epsilon) \Phi(\epsilon_T) y dF. \quad (I б)$$

При $\epsilon > \epsilon_T$ $\bar{\Phi}(\epsilon_T) = 0$. Следовательно, подынтегральное выражение первого слагаемого (I б) отлично от нуля только вблизи от нейтральной линии сечения при $y = \pm h_1$ (см. рис. 3). Площадь

поперечного сечения, расположенную между линиями от $y = -h_1$ до $y = +h_1$, обозначим через F_1 . Тогда учитывая, что $\varepsilon = y/\rho$ первый интеграл выражения (I б) преобразуем

$$\int_{F_1} \varepsilon E \bar{\Phi}(\varepsilon_\tau) y dF = \frac{E}{\rho} \int_{F_1} y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_z^{F_1},$$

где $J_z^{F_1}$ - момент инерции площади F_1 относительно оси z .

Если $\varepsilon < \varepsilon_\tau$, то $\Phi(\varepsilon_\tau) = 0$. Обозначим через F_2 площадь сечения, расположенную выше $y = h_1$ и второй интеграл перепишем

$$\int_{F_2} \sigma_\tau \Phi(\varepsilon_\tau) y dF = 2\sigma_\tau \int_{F_2} y dF = 2\sigma_\tau S_z^{F_2}, \quad \text{где } S_z^{F_2} \text{ - статический момент площади } F_2 \text{ относительно оси } z.$$

Когда $\varepsilon < \varepsilon'_\tau$, тогда $\Phi(\varepsilon'_\tau) = 0$. Через F_3 обозначим площадь поперечного сечения, расположенную выше $y = h_2$ и выражение (I б) окончательно представим в виде

$$M = E J_z^{F_1} / \rho + 2\sigma_\tau S_z^{F_2} + 2 \int_{F_3} f(\varepsilon) y dF. \quad (4)$$

Расстояния от нейтральной линии до границ F_i определяются из подобия треугольников (см. рис. 3) $h_1 = h \varepsilon_\tau / \varepsilon_{max}$, $h_2 = h \varepsilon'_\tau / \varepsilon_{max}$.

В частном случае, если площадка текучести на диаграмме отсутствует, то $\varepsilon_\tau = \varepsilon'_\tau$ и $F_2 = F_3$.

На основании теоремы о разгрузке [3] $\sigma_{раз} = My / J_z$. Учитывая, что линейная деформация на расстоянии y от нейтральной плоскости $\varepsilon = y \varepsilon_{max} / h$ и кривизна $1/\rho = \varepsilon_{max} / h$, остаточное напряжение при заданном ε_{max} вычисляется:

$$\sigma_0 = \sigma - \sigma_{раз} = E \bar{\Phi}(\varepsilon_\tau) y \varepsilon_{max} / h + \sigma_\tau \Phi(\varepsilon_\tau) + f(\varepsilon) \Phi(\varepsilon'_\tau) - [E J_z^{F_1} \varepsilon_{max} / h + 2\sigma_\tau S_z^{F_2} + 2 \int_{F_3} f(\varepsilon) y dF] y / J_z. \quad (5)$$

Составлена программа вычисления изгибающего момента, остаточного напряжения и кривизны при заданной деформации ε_{max} . При $\varepsilon_{max} = \varepsilon_{\delta\rho}$ из выражения (4) получим $M_{раз}$.

В работе предложено аналитическое выражение достаточно точно аппроксимирующее диаграмму растяжения упруго-пластичного материала и пригодное при машинном проектировании. Идеализированная диаграмма (упругая, идеально упруго-пластическая, жестко-пластическая) вытекает из предложенного выражения как частный случай. Составленная небольшая программа на языке АЛГОЛ позволяет это выражение использовать не только при активной деформации. На примере показано применение и преимущество предложенной зависимости.

Л и т е р а т у р а

1. М а л и н и н Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., "Машиностроение", 1968.
2. Р а д ц и г Ю.А. Статически неопределимые фермы наименьшего веса. М., Изд -во Казанского университета, 1969.
3. И л ь ю ш и н А.А. Пластичность. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.

УДК 681.3.065

А.И. Д а н и л и н

СОЗДАНИЕ ВХОДНОГО ЯЗЫКА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

При создании автоматизированных систем проектирования возникает проблема управления расчетными модулями с сохранением таких важных свойств системы как открытость и гибкость использования [1]. Традиционные управляющие программы реализуют жесткую последовательность вызова модулей, при добавлении новых модулей необходима корректировка управляющей программы. Поэтому большинство разработчиков пришли к идее генерации управляющих программ и в этой связи к необходимости входного языка пользователя [2], [3]. Язык в виде меню обеспечивает гибкость использования только для отдельных модулей. При добавлении новых модулей естественно необходимо введение новых элементов в язык и, следовательно, изменение транслятора.

При программировании на ПЛ/1 имеется возможность записи управляющей программы, не накладывающей никаких ограничений на последовательность и количество вызываемых модулей. Такие управляющие программы практически реализуют входной язык пользователя, но при этом возникает необходимость написания транслятора с этого языка к, соответственно, исправлений при добавлении новых моду-

лей. Для этой цели имеет средства создания программных фаз с перекрытием. Для этой цели служит оператор *CALL OVERLAY* ('имя фазы');