УДК 629.7:539.3

В.А. Зарубин

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ БЕЗМОМЕНТНЫХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В [I] описан конечный элемент подкрепленной безмоментной оболочки, полученный в напряжениях для метода сил.

Целесообразно иметь подобный элемент в библиотеках программ,реализующих метод конечных элементов в перемещениях. В статье приводятся зависимости, позволяющие получить матрицу жесткости подкрепленного элемента на основе любого из известных мембранных элементов с полем перемещений, заданном в явном виде. Элементы данного типа позволяют сэкономить время при моделировании и анализе подкрепленных тонкостенных оболочек, так как сохраняют естественность описания конструкции в отличие от традиционных мембранных элементов, требующих редуцирования.

Исходными данными для элемента являются:

t – толщина обшивки;

E_x, E_y, G, μ_{xy} – модули упругости и сдвига,коэффициент Пуассона материала обшивки(ортотропия упругих свойств позволяет учитывать наклеп листов обшивки по направлению прокатки);

A_i – площадь поперечного сечения элемента подкрепления набора;

P_i – шаг между элементами подкрепления i-го набора;

φ_i – угол между направлением элементов подкрепления набора и местной осью x элемента;

E_i – модуль упругости элементов подкрепления i-го набора;

$i=1,2,...n$ – номер подкрепляющего набора.

Для взятого за основу базового мембранного элемента соотношение деформация по элементу – узловые перемещения определено в явном виде:

$$\{\varepsilon\} = [T_{\varepsilon\Delta}]\{\Delta\}, \qquad (I)$$

где $\{\varepsilon\}$ – вектор деформации на элементе

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \gamma_{xy}\}, \qquad (2)$$

$\{\Delta\}$ – вектор узловых перемещений;

$[T_{\varepsilon\Delta}]$ – матрица связи вектора деформаций и вектора узловых перемещений.

Выбранный элемент будет моделировать обшивку.

Осевые деформации ε_i, параллельные *i-му* набору, определяются через деформации обшивки:

$$\varepsilon_i = \ell_i^2 \varepsilon_x \, m_i^2 \varepsilon_y \, \ell_i m_i \gamma_{xy} , \qquad (3)$$

где

$$\ell_i = \cos\varphi_i , \qquad (4)$$

$$m_i = \sin\varphi_i \qquad (5)$$

Для всех n наборов в матричной форме

$$\{\varepsilon_i\} = [T_{\varepsilon i \varepsilon}] \cdot \{\varepsilon\}, \qquad (6)$$

$$\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon_1 \; \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n\}, \qquad (7)$$

$$[T_{\varepsilon i \varepsilon}] = \begin{bmatrix} \ell_1^2 & m_1^2 & \ell_1 m_1 \\ \ell_2^2 & m_2^2 & \ell_2 m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \ell_n^2 & m_n^2 & \ell_n m_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Осевые деформации ε_i являются деформациями элементов подкрепления *i-го* набора, поэтому осевые напряжения в подкреплениях *i-го* набора будут:

$$\{\sigma_i\} = [E_i] \cdot \{\varepsilon_i\} = [T_{\sigma_i \varepsilon}] \{\varepsilon\}, \qquad (9)$$

где $\{\sigma_i\}$ – вектор напряжений в элементах подкрепляющих наборов и

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}, \qquad (10)$$

$$[E_i] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & E_2 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & E_n \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$$[T_{\sigma i \varepsilon}] = [E_i] \, [T_{\varepsilon i \varepsilon}] \qquad (12)$$

Вектор напряжений $\{\sigma\}$ в обшивке связан с деформациями $\{\varepsilon\}$ через матрицу упругости $[T_{\sigma\varepsilon}]$:

$$\{\sigma\} = [T_{\sigma\varepsilon}]\{\varepsilon\}, \qquad (13)$$

где

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}, \qquad (14)$$

$$[T_{\sigma\varepsilon}] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

$$E_{xx} = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}, \qquad (16)$$

$$E_{yy} = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}, \qquad (17)$$

$$E_{xy} = \mu_{xy} E_{xx} = \mu_{yx} E_{yy}, \qquad (18)$$

$$\mu_{yx} = \mu_{xy} E_y / E_x . \qquad (19)$$

Потоки сил $\{N\}$ в обшивке можно записать в виде

$$\{N\} = t\{\sigma\} = t\,[T_{\sigma\varepsilon}]\{\varepsilon\}, \qquad (20)$$

где $\{N\}$ – вектор потоков сил и

$$\{N\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}. \qquad (21)$$

Потоки сил $\{N_i\}$ в подкреплениях *i-го* набора будут

$$\{N_i\} = \sigma_i t_i = E_i\,[T_{Ni\varepsilon}]\{\varepsilon\}\,t_i \qquad (22)$$

$t_i = A_i/\rho_i$ – приведенная толщина набора (23)

$$\{N_i\} = \{N_{ix} \ N_{iy} \ N_{ixy}\} \qquad (24)$$

$$[T_{Ni\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \ell_i^4 & \ell_i^2 m_i^2 & \ell_i^3 m_i \\ \ell_i^2 m_i^2 & m_i^4 & \ell_i m_i^3 \\ \ell_i^3 m_i & \ell_i m_i^3 & \ell_i^2 m_i^2 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Суммарный поток сил $\{N_c\}$ по элементу определяется как

$$\{N_c\}=\{N\}+\sum_{i=1}^{n}\{N_i\}, \qquad (26)$$

где

$$\{N_c\}=\{N_{cx}\ N_{cy}\ N_{cxy}\}. \qquad (27)$$

Суммарный поток определяется через деформации в обшивке в виде

$$\{N_c\}=t\,[T_{Nc\varepsilon}]\{\varepsilon\}, \qquad (28)$$

где

$$[T_{Nc\varepsilon}]=[T_{\sigma\varepsilon}]+\sum_{i=1}^{n}\eta\,[T_{Ni\varepsilon}] \qquad (29)$$

и

$$\eta_i=E_i\,t_i/t \qquad (30)$$

вектор $\{N_c\}$ можно рассматривать как поток сил в однородном элементе толщиной t_c, где

$$t_c=t+\sum_{i=1}^{n}t_i. \qquad (31)$$

Тогда вектор напряжений $\{\sigma_c\}$ в таком однородном элементе определится:

$$\{\sigma_c\}=1/t_c\{N_c\}, \qquad (32)$$

где

$$\{\sigma_c\}=\{\sigma_{cx}\ \sigma_{cy}\ \tau_{cxy}\} \qquad (33)$$

Подставляя (28) в (32) получим

$$\{\sigma_c\}=[T_{\sigma c\varepsilon}]\{\varepsilon\}, \qquad (34)$$

где

$$[T_{\sigma c\varepsilon}]=t/t_c\,[T_{Nc\varepsilon}]. \qquad (35)$$

Имея соотношение (I), определяющее зависимость деформация – – узловые перемещения, и матрицу упругости $[T_{\sigma c\varepsilon}]$ элемента с наборами подкреплений, можем определить матрицу жесткости $[K]$:

$$[K]=\int_V [T_{\varepsilon\Delta}]^T[T_{\sigma c\varepsilon}]\cdot[T_{\varepsilon\Delta}]\,dV, \qquad (36)$$

где интегрирование выполняется по объему V элемента.

Результатом решения системы уравнений метода конечных элементов в перемещениях является вектор узловых перемещений $\{\Delta\}$. Зная перемещения и используя зависимости (I),(6),(9) и (I3), можем получить напряжения в обшивке и элементах подкреплений:

$$\{\sigma\}=[T_{\sigma\varepsilon}][T_{\varepsilon\Delta}]\{\Delta\}, \qquad (37)$$

$$\{\sigma_i\}=[T_{\sigma c\varepsilon}][T_{\varepsilon\Delta}]\{\Delta\}. \qquad (38)$$

Литература: 1. Robinson J., „Integroted Theory of Finite Element Methods", John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973, p-p 313-357.