

Е.Г. Макеев

ЭФФЕКТИВНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ
ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Процесс оптимального проектирования связан с необходимостью многократного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции. В связи с этим снижение вычислительных затрат является актуальной проблемой при использовании любого метода для анализа НДС, в том числе и метода конечных элементов.

Большое практическое значение в этих условиях имеют модели конечных элементов, которые используют простые законы изменения перемещений при сохранении приемлемой точности.

При проектировании конструкций, включающих тонкие пластины и оболочки, задача становится особенно трудной, если выполнять условия совместности элементов не только по перемещениям, но и по их производным.

Поэтому весьма перспективным является применение несовместных конечных элементов [1], в которых нарушается требование междуэлементной непрерывности производных от прогибов.

Несовместные элементы гораздо экономичнее, проще в программировании и, как правило, имеют точность, сравнимую с точностью совместных элементов.

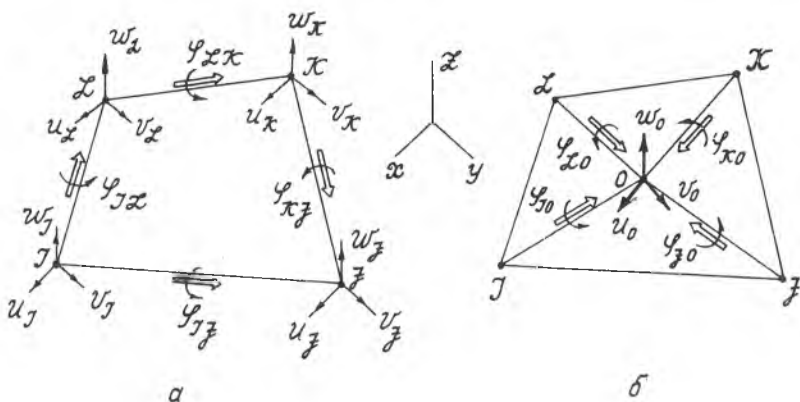
Систематическое исследование различных вариантов конечных элементов, проведенное в Горьковском НИИ механики [2], позволяет сделать следующие выводы:

1. Для анализа тонкостенных, существенно нерегулярных конструкций рационально использовать элементы с простейшими функциями формы.
2. При расчете составных оболочек и пластин с изломами поверхностей наиболее эффективны конечные элементы, которые в качестве степеней свободы имеют лишь узловые перемещения и углы поворота нормали к срединной поверхности.

В данной работе предлагается несовместный четырехузловой элемент для моделирования тонких пластин и оболочек, при разработке которого максимально учитывались указанные выше положения.

Элемент представляет собой четырехугольную, в общем случае закрученную, пластинку (рис.1). Толщина пластинки - δ , материал -

изотропный с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Узлы элемента J, \bar{J}, K, \bar{L} расположены в срединной поверхности пластинки. Стороны четырехугольника J, \bar{J}, K, \bar{L} - прямые.



Р и с.1. Общий вид элемента и его степени свободы: а-внешние; б-внутренние

Закрученная пластинка аппроксимируется четырьмя плоскими треугольными пластинками с общей вершиной в центре элемента O . Координаты точки O находятся осреднением координат узлов.

Степени свободы элемента являются перемещения узлов в общей системе координат XUZ и нормальные узлы поворота в серединах всех сторон каждого треугольника.

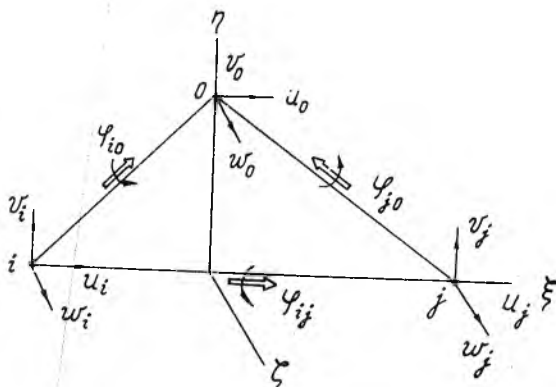
Нормальный угол поворота - это угол поворота нормали к поверхности пластины в плоскости, перпендикулярной стороне. Подобные углы в треугольном элементе изгибаемой пластины впервые ввел Морли [4].

Таким образом, элемент имеет 16 внешних и 7 внутренних степеней свободы. Положительное значение внешнего угла поворота соответствует направлению углового вектора (светлые стрелки) от узла с меньшим номером к узлу с большим номером. На рис.1 предполагается $J < \bar{J}, K < \bar{K}, L < \bar{L}$.

Матрица жесткости (МЖ) элемента формируется из МЖ отдельных треугольных пластинок, для описания перемещений которых используются простейшие полиномы.

Для треугольной пластинки, как показано на рис.2, вводится местная декартовая система координат $\xi\eta$. Степени свободы пластинки образуют вектор

$$\{U\} = [u_i, v_i, w_i, \varphi_{ij}, u_j, v_j, w_j, \varphi_{jo}, u_0, v_0, w_0, \varphi_{io}]^T. \quad (I)$$



Р и с.2. Треугольная пластинка

Для перемещений в срединной плоскости треугольной пластинки используется линейная аппроксимация, а для перемещений из этой плоскости - квадратичная.

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta; \\ v = a_4 + a_5 \xi + a_6 \eta; \\ w = a_7 + a_8 \xi + a_9 \eta + a_{10} \xi^2 + a_{11} \xi \eta + a_{12} \eta^2. \end{cases} \quad (2)$$

Нормальный угол поворота на стороне, образующей угол γ с осью ξ

$$\varphi = \varphi_{\xi} \cos \gamma + \varphi_{\eta} \sin \gamma. \quad (3)$$

Углы поворота относительно осей ξ и η для тонкой пластинки определяются через прогиб

$$\varphi_{\xi} = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \varphi_{\eta} = -\frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Теперь вектор (I) можно записать в виде

$$\{U\} = [R] \{a\}, \quad (5)$$

где $\{a\} = [a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}]^T$.

Аппроксимирующую матрицу [R] можно легко получить подстановкой в (2) узловых координат треугольника, а в (3) — координат середины его сторон. Исследование этой матрицы показало, что она является особенной только в том случае, когда площадь треугольника равна 0.

Поэтому из (5) следует

$$\{a\} = [R^{-1}] \{U\}. \quad (6)$$

Матрицу жесткости треугольной пластинки можно получить, вычисляя ее энергию деформации. При малых деформациях тонкой пластинки в срединной поверхности и в поперечном направлении выражение для энергии имеет вид

$$U = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \iint_{S_{\Delta}} \left\{ \frac{1}{B} [N_{\xi}^2 + N_{\eta}^2 - 2\nu N_{\xi} N_{\eta} + 2(1+\nu) N_{\xi\eta}^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{D} [M_{\xi}^2 + M_{\eta}^2 - 2\nu M_{\xi} M_{\eta} + 2(1+\nu) M_{\xi\eta}^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (7)$$

где $B = \frac{E\delta^3}{1-\nu^2}$, $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$.

Интегрирование в (7) ведется по площади треугольника S_{Δ} .

Мембранные усилия, а также изгибающие и крутящий моменты выражаются через перемещения

$$\begin{cases} N_{\xi} = B \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v}{\partial \eta} \right); \\ N_{\eta} = B \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right); \\ N_{\xi\eta} = (1-\nu) B \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right); \end{cases} \quad \begin{cases} M_{\xi} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \\ M_{\eta} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); \\ M_{\xi\eta} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}. \end{cases} \quad (8)$$

Вычисление производных от перемещений (2) показывает, что усилия и моменты (6) в треугольнике являются постоянными. Поэтому энергия деформации (7) легко преобразуется в квадратичную форму относительно $\{a\}$

$$\mathcal{V} = 1/2 \{a\}^T [C] \{a\}, \quad (9)$$

где $[C] = S_{\Delta} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} [C_1] & [0] \\ [0] & [C_2] \end{bmatrix}$;

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & \nu & & \\ \mu & 0 & \mu & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \mu & 0 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}, \quad [C_2] = \frac{\sigma^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & \nu & & & & \\ \mu & 0 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

$\mu = \frac{1-\nu}{2}$, $[0]$ - нулевая матрица порядка 6х6.

Используя (6), можно получить

$$\mathcal{V} = 1/2 \{u\}^T [R^{-1}]^T [C] [R^{-1}] \{u\}. \quad (10)$$

Отсюда очевидно, что матрица жесткости треугольной пластинки в системе координат $\xi \eta \zeta$ имеет вид

$$[K] = [R^{-1}]^T [C] [R^{-1}]. \quad (11)$$

Матрица жесткости этой пластинки в общей системе координат получается конгруэнтным преобразованием

$$[K] = [A]^T [K] [A]. \quad (12)$$

Матрица вращения $[A]$ имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} [\lambda_{ij}] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda_{jd}] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda_{id}] \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$[\lambda_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \lambda_{\xi x} & \lambda_{\xi y} & \lambda_{\xi z} & 0 \\ \lambda_{\eta x} & \lambda_{\eta y} & \lambda_{\eta z} & 0 \\ \lambda_{\zeta x} & \lambda_{\zeta y} & \lambda_{\zeta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \alpha = i, j; \\ \beta = j, 0; \end{cases}$$

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i < j; \\ -1, \text{ если } i > j; \end{cases} \quad \omega_{j0} = \omega_{i0} = 1;$$

$\lambda_{\xi x}$ - косинус угла между осями ξ и x и т.д.

Матрица жесткости $[H]$ элемента относительно всех степеней свободы получается при соответствующем суммировании матриц отдельных треугольников. Суммирование проводится таким образом, что первые 16 строк в $[H]$ набираются для вектора внешних степеней $\{W\}$, а остальные 7 - для вектора внутренних степеней $\{W_0\}$.

Тогда эту матрицу можно разделить на блоки, которые относятся к векторам $\{W\}$ и $\{W_0\}$

$$[H] = \begin{bmatrix} [h] & [h_*] \\ [h_*] & [h] \end{bmatrix} \quad (14)$$

С помощью такого разложения легко исключить внутренние степени свободы, поскольку соответствующие им усилия должны отсутствовать

$$\{W_0\} = -[h_0^{-1}] [h_*] \{W\}. \quad (15)$$

Следовательно искомая матрица жесткости элемента относительно внешних степеней свободы записывается в виде

$$[K_{\xi, \eta}] = [h] - [h_*] [h_0^{-1}] [h_*]. \quad (16)$$

Вычисление напряжений в центре и узлах элемента осуществляется в местной системе координат, связанной с центром O .

Напряжение в центре элемента вычисляется как средневзвешенное по площади напряжение четырех треугольников.

Узловое напряжение определяется линейной аппроксимацией центрального напряжения и средневзвешенного напряжения двух треугольников, сходящихся в данном узле.

Для определения перерезывающих сил дискретные значения моментов в отдельных треугольниках аппроксимируются линейными функциями, непрерывными на всем элементе. Дифференцирование этих функций позволяет найти перерезывающие силы, которые постоянны в элементе.

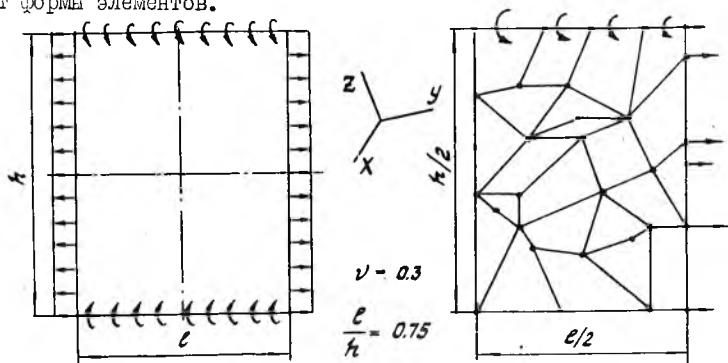
Работоспособность и точность предложенного элемента исследовалась с помощью комплекса программ ПРАСАК, разработанного в Куйбышевском авиационном институте.

Эффективной проверкой работоспособности конечных элементов является пэтч-тест, предложенный Айронсом [5].

В данном случае этот тест представляет собой прямоугольную пластину постоянной толщины, которая разбивается на элементы различной формы (рис.3).

По границам пластины приложены узловые силы и моменты, которые соответствуют двум случаям однородного напряженного состояния: чистому растяжению и чистому изгибу.

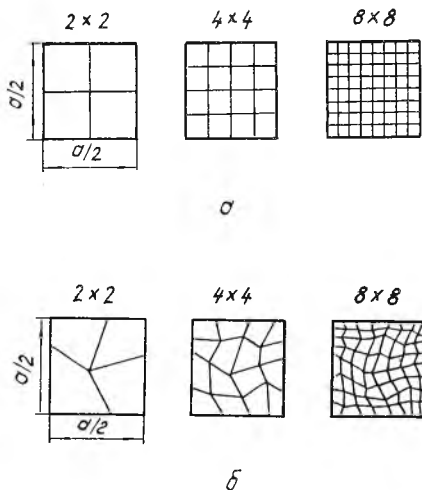
Вычисления показали, что во всех элементах соответствующие напряжения совпадают с заданными. Наибольшая погрешность 0,001%. Это означает, что при произвольных статических и кинематических условиях по мере измельчения сетки решение будет приближаться к точному независимо от формы элементов.



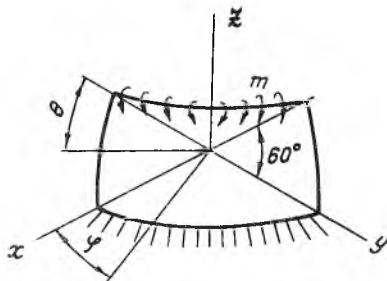
Р и с.3. Пэтч-тест

Распространенным тестом по оценке точности изгибаемых конечных элементов является расчет квадратной пластины.

Выполнены расчеты шарнирно опертой и защемленной квадратных пластин. Характер разбиения одной четверти пластины на конечные элементы показан на рис.4.



Р и с.4. Конечноэлементные сетки квадратной пластины: а-квадратные элементы; б-произвольные элементы



Р и с.5. Сферическая оболочка

Рассматривались следующие случаи нагружения:

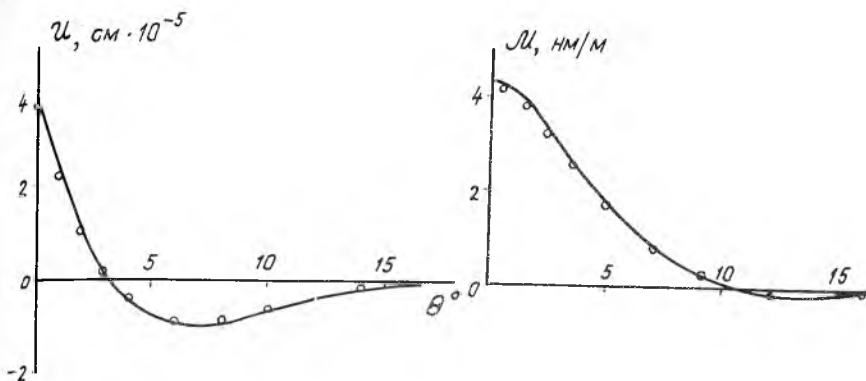
- 1) равномерно распределенное давление q ;
- 2) моменты интенсивностью m , равномерно распределенные по двум противоположным краям;
- 3) сосредоточенная сила P , приложенная в центре.

Некоторые результаты и соответствующие аналитические решения [3] приведены в таблице, где w - центральный прогиб пластины; σ_x, σ_y - максимальные по толщине эквивалентные напряжения в центре и углу пластины, вычисленные по энергетической теории.

В качестве последнего примера рассматривается защемленная полусфера с вырезом, нагруженная равномерно распределенным моментом m . На рис.5 показана одна четверть такой оболочки. Линии конечноэлементной сетки соответствуют углам θ , равным 1,2,3,4, 6,8,10,14,18,26,42 градусам, и углам φ , кратным 6° .

На рис.6 показаны расчетные значения горизонтальных перемещений U и изгибающих моментов M в зависимости от угла θ .

Аналитические кривые взяты из работы [1] .



Р и с. 6. Результаты расчета сферической оболочки: — теория;
 о — расчет

$$\nu = 0,3$$

Т а б л и ц а

Характер разобения	Квадратные элементы						Произвольные элементы					
	Шарнирное опирание						Защемление		Шарнирное опирание			
Граничные условия												
Случай нагружения	q		m		P		q		m		P	
Расчетный параметр	w	b _ц	w	b _ц	w	b _у	w	b _ц	w	b _ц	w	b _у
Сетка 2x2	450	266	384	215	157	551	198	149	389	221	164	542
Сетка 4x4	418	280	372	210	129	616	147	139	375	213	133	611
Сетка 8x8	407	286	369	208	120	630	131	138	370	209	122	628
Теория	406	287	368	208	116	634	126	138	368	208	116	634
Множитель	10 ⁻⁵	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻²	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁵	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻²	10 ⁻⁴	10 ⁻³
	$\frac{qa^4}{D}$	$\frac{qa^2}{\delta^2}$	$\frac{ma^2}{D}$	$\frac{m}{\delta^2}$	$\frac{Pa^2}{D}$	$\frac{P}{\delta^2}$	$\frac{qa^4}{D}$	$\frac{qa^2}{\delta^2}$	$\frac{ma^2}{D}$	$\frac{m}{\delta^2}$	$\frac{Pa^2}{D}$	$\frac{P}{\delta^2}$

З а к л ю ч е н и е

Разработан четырехугольный конечный элемент для расчета тонких пластин и оболочек. Элемент имеет минимум внешних степеней свободы по сравнению с другими четырехугольными элементами оболочек.

Исследование элемента показало его достаточно высокую работоспособность и точность.

Благодаря сочетанию этих свойств с простотой реализации, элемент может послужить хорошим базисом для задач оптимального проектирования и других нелинейных приложений.

Л и т е р а т у р а

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, с. 541.

2. Зувев Б.И. и др. Сравнение некоторых моделей конечных элементов при анализе тонкостенных пространственных конструкций. В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике. Горький. ГГУ, 1975, с. 149-163.

3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963, с. 635.

4. Marley L. S. D. *The constant-moment plate bending element "J. Strain Analysis", 1971 (6), No 1, pp. 20-24.*

5. Irons B. M. *The superpatch theorem and other propositions relating to the patch test. "CANCAM 75, Proc. 5th Can. Congr. Appl. Mech., Fredericton, N. B., 1975." Fredericton, 1975, pp. 651-652*