Ц И Ф Р О В А Я   О Б Р А Б О Т К А
И   С Ж А Т И Е   Д А Н Н Ы Х

С.В. Михайлов, В.А. Сойфер

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛЯ ПО ДИСКРЕТНОМУ МНОЖЕСТВУ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ИНЕРЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ

Введение

Задача оценивания состояний стохастических сисмем с распределенными параметрами (СРП) представляет большой интерес во многих инженерных приложениях. В последние годы для таких систем многими исследователями были построены фильтры, минимизирующие дисперсию ошибки оценивания и являющиеся распределенным фильтром Калмана в той или иной форме записи [1], [2].

Возможность использования фильтра Калмана в задаче обратной фильтрации или восстановления непрерывных одномерных сигналов была изучена в работе [3]. Она обеспечивается расширением фильтра за счет динамической модели измерительной системы в пространстве состояний. В данной работе этот подход развивается для класса параболических СРП.

Р а с п р е д е л е н н ы й   ф и л ь т р   К а л м а н а

Предварим обсуждение задачи восстановления краткой сводкой основных результатов по двумерной фильтрации.

Рассмотрим линейную распределительную систему на пространственной области Ω с границей $\partial\Omega$ Математической моделью системы выберем параболическое уравнение и обобщим результаты [2] на векторный случай:

$$\frac{\partial \bar{u}(t,x)}{\partial t} = L_1 \bar{u}(t,x) + \Gamma \bar{w}(t,x),\ x \in \Omega,\ t \in [0,T] \quad (1)$$

с граничными условиями

$$L_2 \bar{u}(t,x) = \bar{0},\ x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\bar{u}(t,x)$ - $n \times 1$ — вектор состояния системы;

L_1 и L_2 — пространственные операторы;

Γ - $n \times p$ — матрица коэффициентов.

Будем считать, что наблюдения производятся в моменты времени $\tau, 2\tau, \ldots, k\tau, \ldots$. Пусть измерения производятся одновременно m датчиками, закрепленными в точках x_i , $i = \overline{1,m}$. Тогда уравнение наблюдений запишется в виде

$$\bar{y}_k(x_g) = M \bar{u}_k(x_g) + \bar{V}_k(x_g), \quad (3)$$

где $\bar{u}_k(x_g)$ означает $\bar{u}(k\tau, x_g)$,

$\bar{y}_k(x_g) = [y_k(x_1) \ldots y_k(x_m)]^T$, $\bar{V}_k(x_g) = [V_k(x_1) \cdots V_k(x_m)]^T$,

M - $m \times n$ — матрица коэффициентов.

Шумы $\bar{W}(t,x)$ и $\bar{V}_k(t,x)$ - белые гауссовские, соответственно p - и m -мерные, статистически независимые процессы с нулевыми средними и ковариациями.

$$E\{\bar{W}(t,x)\bar{W}^T(t',x')\} = C(t,x',x')\delta(t-t'). \quad (4)$$

$$E\{V_k(x_i)\,V_j(x_i)\} = Q_k(x_i)\,\delta_{kj},\ i = \overline{1,m}. \quad (5)$$

$$E\{\bar{V}_k(x_g)\bar{V}_k^T(x_g)\} = Q_k(x_g) = diag\,[Q_k(x_1) \ldots Q_k(x_m)]. \quad (6)$$

Предполагая, что задача поставлена в смысле Адамара и заменяя уравнение (I) уравнением дискретного времени, аппроксимирующим решение (I) в моменты τ , 2τ, . . ., $k\tau$, . . . , можно обычным образом записать выражение для оптимальной оценки состояния:

$$\hat{\bar{u}}_{k/k}(x) = \hat{\bar{u}}_{k/k-1}(x) + K_k(x,x_g)\left[\bar{y}_k(x_g) - M\hat{\bar{u}}_{k/k-1}(x_g)\right]; \quad (7)$$

где $\hat{u}_{k/k-1}(x) = \int\limits_{\Omega} G_{k-1}(x, x')\, \hat{u}_{k-1/k-1}(x')\, dx'$; (8)

$$G_{k-1}(x, x') \triangleq G(k\tau, \overline{k-1}\,\tau, x, x'). \qquad (9)$$

Здесь G – функция Грина системы.

Функцию усиления $K_k(x, x_g)$ надлежит выбирать из условия минимума дисперсии ошибки оценивания $\tilde{u}_k(x)$:

$$\tilde{u}_k(x) = \bar{u}_k(x) - \hat{u}_{k/k}(x); \qquad (10)$$

$$P_k(x_1, x_2) = E\left\{ \tilde{u}_k(x_2)\, \tilde{u}_k^T(x_2) \right\}. \qquad (11)$$

Развернутая запись (II) имеет вид

$$P_k(x_1, x_2) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} G_{k-1}(x_1, x') S_{k-1}(x', x'') G_{k-1}^T(x_2, x'')\, dx'\, dx'' -$$

$$- \iint\limits_{\Omega\,\Omega} G_{k-1}(x_1, x') S_{k-1}(x', x'') G_{k-1}^T(x_g, x'') M^T K_k^T(x_2, x_g)\, dx'\, dx'' -$$

$$- K_k(x_1, x_g) M \iint\limits_{\Omega\,\Omega} G_{k-1}(x_g, x') S_{k-1}(x', x'') G_{k-1}^T(x_2, x'')\, dx'\, dx'' +$$

$$+ K_k(x_1, x_g) \Big[M \iint\limits_{\Omega\,\Omega} G_{k-1}(x_g, x') S_{k-1}(x', x'') G_{k-1}^T(x_g, x'') M^T dx'\, dx'' +$$

$$+ Q_k(x_g) \Big] K_k^T(x_2, x_g), \qquad (12)$$

где $S_{k-1}(x', x'') = P_{k-1}(x', x'') + \tau \Gamma C_{k-1}(x', x'') \Gamma^T$. (13)

Минимизацию $P_k(x_1, x_2)$ по $K_k(x, x_g)$ проведем, представив $P, G, \Gamma C \Gamma^T$ в ортогональном базисе. Если функция обладает некоторыми свойствами регулярности (например, интегрируема в квадрате), то ее ряд в таком базисе представляет саму функцию с любой желаемой точностью. В качестве ортогональной системы удобно выбрать систему собственных функций L_1 (так называемая модальная аппроксимация).

Выберем в полном ортонормированном базисе $\{z_i(x), i = 1, 2, \ldots, x \in \Omega\}$ первые ν функций, удовлетворив заданным требованиям по точности. Тогда

$$P_k(x', x'') = Z^T(x')\, W_k\, Z(x''); \qquad (14)$$

$$G_K(x',x'')=Z^T(x')A_K Z(x''); \tag{15}$$

$$\Gamma C(x',x'')\Gamma^T=Z^T(x')H_K Z(x''), \tag{16}$$

где $n\times nr$ – матрица $Z(x)$;

$$Z^T(x)=\begin{bmatrix} z_1(x)\dots z_r(x) & 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \dots\ 0 & z_1(x)\dots z_r(x) & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots & 0\ \dots\ 0 & \ddots\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & z_1(x)\dots z_r(x) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

W_K, A_K, H_K – $nr\times nr$ клеточные матрицы, имеющие одинаковую структуру:

$$A_K=\begin{bmatrix} \Lambda_K^{1,1} & \dots & \Lambda_K^{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_K^{n,1} & \dots & \Lambda_K^{n,n} \end{bmatrix}; \tag{18}$$

$$\Lambda_K^{i,j}=\begin{bmatrix} a_K^{i,j}(1,1) & \dots & a_K^{i,j}(1,r) \\ \vdots & & \\ a_K^{i,j}(r,1) & \dots & a_K^{i,j}(r,r) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Отметим, что усиление оптимального фильтра $K_K(x,x_g)$ определяется лишь величиной $P_K(x,x)$, т.е. значениями $P_K(x_1,x_2)$ при $x_1=x_2=x$. Подставляя выражения (14) – (16) в выражение (12) и используя последнее обстоятельство, сразу получаем:

$$K_K(x,x_g)=Z^T(x)D_K(x_g); \tag{20}$$

$$D_K(x_g)=E_{K-1}B^T(x_g)\left[B(x_g)E_{K-1}B^T(x_g)+Q_K(x_g)\right]^{-1}, \tag{21}$$

где $E_{K-1}=A_{K-1}\left[W_{K-1}+\tau H_{K-1}\right]A_{K-1}$; (22)

$$B(x_g)=MZ^T(x_g). \tag{23}$$

Тогда выражение (12) удобно записать таким образом:

$$E_K=A_K E_{K-1}A_K-A_K E_{K-1}B^T(x_g)\left[B(x_g)E_{K-1}B^T(x_g)+\right.$$
$$\left.+Q_K(x_g)\right]^{-1}B(x_g)E_{K-1}A_K+\tau A_K H_K A_K. \tag{24}$$

Окончательно для оптимальной оценки состояния получим:

$$\hat{u}_{k/k}(x) = Z^T(x)\,\hat{\bar{\psi}}_{k/k}\ ; \tag{25}$$

$$\hat{\bar{\psi}}_{k/k} = \hat{\bar{\psi}}_{k/k-1} + D_k(x_g)\left[\bar{y}_k(x_g) - B(x_g)\,\hat{\bar{\psi}}_{k/k-1}\right]; \tag{26}$$

$$\hat{\bar{\psi}}_{k/k-1} = A_{k-1}\,\hat{\bar{\psi}}_{k-1/k-1}\ ; \tag{27}$$

$$\hat{\bar{\psi}}_{0/0} = \int\limits_{\Omega} Z(x)\,\hat{\bar{u}}_{0/0}(x)\,dx\ . \tag{28}$$

Уравнения (2I) - (28) определяют двумерный калмановский фильтр.

Обратная фильтрация

В целях наглядности рассмотрим систему конкретного вида. Пусть мы имеем одномерное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \gamma_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \gamma_2 u(t,x) + W(t,x),\ x \in [0,h] \tag{29}$$

с граничными условиями

$$u(t,0) = u(t,h) = 0 \quad \forall t\ . \tag{30}$$

В отношении $W(t,x)$ справедливы предположения, сделанные на с. 60-64.

Ограничимся сначала одним датчиком. Примем во внимание его динамические искажения:

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \alpha y(t,x) + \beta u(t,x) + \varepsilon \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\ . \tag{3I}$$

Последний член в выражение (3I) указывает на наличие пространственного интегрирования. Ввиду малой апертуры реальных преобразователей будем считать ε малым. Граничные условия для выражения (3I), естественно, принять соответствующими выражению (30).

Снова будем снимать наблюдения в дискретные моменты времени $\tau,\ 2\tau,\ \ldots,\ k\tau,\ \ldots$:

$$z_k(x_g) = y_k(x_g) + V_k(x_g), \tag{32}$$

где шум наблюдений является белым гауссовским с нулевым средним и дисперсией

9-3465

$$E\left\{V_k(x)V_k(x')\right\}=\begin{cases} q(x), & \text{если } \|x-x'\|<\delta \\ 0, & \text{если } \|x-x'\|>\delta, \end{cases} \qquad (3$$

где δ - малое положительное число.

Наша задача - определить оптимальную в среднеквадратическо смысле оценку состояния $u_k(x)$ по данным измерения $\{y_i(x_q), i=$

Введем обобщенный вектор состояния системы $\bar{u}=[u,y]^T$. Тогда выражения (29) и (3I) можно объединить в матричное уравнение:

$$\frac{\partial\bar{u}(t,x)}{\partial t}=A\frac{\partial^2\bar{u}(t,x)}{\partial x^2}+B\bar{u}(t,x)+\Gamma w(t,x), \qquad (34)$$

где

$$A=\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\gamma_2 & 0\\ \beta & \alpha\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}; \qquad (35)$$

$$z_k(x_q)=M\bar{u}_k(x_q)+V_k(x_q);\quad M=[0\ 1]$$

Полученные прежде уравнения оптимальной фильтрации дают во можность сразу найти оценки состояний. Особо отметим, что при т кой постановке наилучшие оценки искаженного (регистрируемого) действительного сигнала определяются одновременно.

Расширение уравнения (34) на случай многих датчиков произв дится аналогично.

Выпишем в явном виде функцию Грина задачи (34):

$$G(t,t',x,x')=\frac{2}{h}\sum_{i=1}^{\infty}exp\left[\left(-\frac{\pi^2 i^2}{h^2}A+B\right)(t-t')\right]sin\frac{\pi i}{h}x\,sin\frac{\pi i}{h}x' \qquad (36)$$

Ряд равномерно сходится, если собственные числа матрицы A положительны. Поскольку ε мало, число возбужденных мод може быть велико. Его можно оценить по скорости уменьшения следа tr

Отметим, что в случаях, когда динамические свойства датчи описывает уравнение высокого порядка (> I), матрица A имеет в

$$A=\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & \varepsilon & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Таким образом, A сингулярна, т.е. ряд выражения (36) расходится, и предлагаемый метод неприемлем.

Однако в практически важном случае оценивания температурных полей описанная процедура восстановления должна оказаться эффективной.

Литература

1. Tzafestas S.G., Nightengale J.M. Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed-parameter systems. Proc. Inst. elect. Engrs., 1968, 115, pp. 1207-1212.

2. Aidarous S.E., Gevers M.R., Installe M.J. Optimal sensors' allocation strategies for a class of stochastic distributed systems. Intern. jour. Control, 1975, vol. 22, no 2, pp. 197-213.

3. Bayless J.W., Brigham E.O. Application of the Kalman filter to continuous signal restoration. Geophysics, 1970, vol. 35, no 1, pp. 2-23.

В.И.Орищенко

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЛОВНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Гауссовские случайные процессы составляют один из важнейших классов математических моделей процессов стохастической природы в задачах статистической радиотехники и радиофизики, теории автоматического управления и в других. При этом часто возникает необходимость в определении характеристик условных (апостериорных) случайных процессов по заданным характеристикам безусловных (априорных) гауссовских процессов при условии, что в определенные моменты времени стали известны значения самих априорных гауссовских процессов или значения их некоторых преобразований.

В работе [I] определены характеристики условного процесса $X_y(t)$ по заданным характеристикам априорного гауссовского процесса $X(t)$ при условии, что известны значения последнего. Если известно N значений $\{X(T_n)\}_{n=1}^{N}$ гауссовского процесса $X(t)$ в моменты времени $\{T_n\}_{n=1}^{N}$, то среднее и корреляционная функция условного