П.М. Чеголин, В.С. Кончак, Р.Х. Садыхов

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ, НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

(Минск)

В настоящее время в различных областях науки и техники (распознавание образов, цифровая обработка сигналов, анализ систем многозначной логики, фильтрация изображений и т.д.) широкое распространение получили спектральные методы исследования процессов, которые по своей природе являются существенно дискретными. Причем, в последние годы наблюдается тенденция к целесообразности совместного рассмотрения процесса и оператора системы, его порождающего [I].

В данной работе рассматривается спектральный подход к анализу класса дискретных нестационарных процессов, инвариантных к p -ичному сдвигу, имеющих постоянную дисперсию и зависящую от начала отсчета корреляционную функцию. Широко известные стационарные и двоично-стационарные случайные процессы являются частным случаем подобного класса процессов.

Определим p -ичный нестационарный процесс как реакцию p -ичной нестационарной системы на "белый шум". Это определение непосредственно следует из общей спектральной модели нестационарных процессов, описанной в работе [2]. Таким образом, p -ичный нестационарный процесс Y можно записать в виде

$$Y=XL_h^p, \tag{I}$$

где X - матрица, представляющая собой ансамбль реализаций "белого шума";

L_h^p - p -циркулянтный оператор p -ичной нестационарной системы, который можно записать как

$$L_h^p=h(t \underset{p}{\oplus} \tau),$$

где $\underset{p}{\oplus}$ означает суммирование по модулю p .

Следует отметить, что i -ая реализация импульсной переходной функции определяется как произведение вектора-строки $\overline{h}$ на матричный оператор сдвига M_i .

1/2 16-3385

Матрица M_1, осуществляющая p -ичный сдвиг вектора $\vec{h}$ на один шаг, имеет блочно-диагональную структуру, где каждый блок выполняет циклический сдвиг p элементов вектора $\vec{h}$ на один шаг.

Учитывая указанные свойства оператора сдвига M_1, его можно записать как

$$
\begin{matrix} Z_1^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_1^p \end{matrix} \qquad (2)
$$

где Z_1^p - оператор циклического сдвига на один элемент размерности p.

Для p -го сдвига оператор M_p имеет вид

$$
\begin{matrix} Z_p^{p^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_p^{p^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_p^{p^2} \end{matrix}.
$$

И, наконец, для сдвига $p^{\alpha-1}$ имеем

$$
M_{p^{\alpha-1}} = Z_{p^{\alpha-1}}^{p^\alpha},
$$

где $\alpha = \log_p n$.

Оператор M_i для произвольного i -го p -ичного сдвига можно записать как

$$
M_i = \prod_{m=1}^{\alpha} \left[M_m \right]^{q_m}, \qquad (3)
$$

где q_m - разрядные коэффициенты p -ичного представления числа i:

$$
i = q_0 p^0 + q_1 p^1 + \dots q_\alpha p^\alpha.
$$

Покажем, что собственным преобразованием для p -ичных нестационарных процессов является преобразование Виленкина-Крестенсона [3], которое является обобщением систем экспоненциальных функций с целочисленным аргументом. Базисная система функций Виленкина-Крестенсона $V(i, k)$ на интервале $[0, n]$ определяется как произведение соответствующих обобщенных функций Радемахера:

$$
V(i, k) = \prod_{m=1}^{\alpha} \left[\chi(m, k) \right]^{q_m}, \qquad (4)
$$

где $\chi(m, k) = e^{-j\frac{2\pi}{p} ent [k/p^{\alpha-m}]}$

Предварительно докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Преобразование Виленкина-Крестенсона является собственным преобразованием оператора p -ичного сдвига, т.е.

$$V^{-1}M_i V = diag\,[V(i,k)]. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя преобразование Виленкина-Крестенсона к выражению (3) и учитывая, что $V^{-1}V=E$, получим:

$$V^{-1}M_i V = V^{-1}\prod_{m=1}^{\alpha}\left[M_m\right]^{q_m}V = (V^{-1}M_1 V)^{q_1}\times\ldots\times(V^{-1}M_\alpha V)^{q_\alpha} =$$
$$= \prod_{m=1}^{\alpha} diag\,[x(m,k)]^{q_m} = diag\, V(i,k),$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Преобразование Виленкина-Крестенсона является собственным преобразованием p -циркулянтной матрицы, т.е.

$$V^{-1}BV = diag\,S_v. \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B - p -циркулянтная матрица. Применяя к B преобразование Виленкина-Крестенсона и учитывая свойство ассоциативности произведения матриц, получим:

$$V^{-1}BV = V^{-1}(BV) = V^{-1}[S_{ij}].$$

Элементы строк матрицы $[S_{ij}]$ являются коэффициентами прямого преобразования Виленкина-Крестенсона p -циркулянтной матрицы B, следовательно, $[S_{ij}]=V diag\,S_v$. С учетом этого $V^{-1}BV=V^{-1}V diag\,S_v = diag\,S_v$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Выполняя в выражении (6) сопряжение, получим

$$diag\,S_v^{*} = (V^{-1}BV)^{*T} = V^{-1}B^{T}V.$$

В работе [2] показано, что при прохождении "белого шума" через нестационарную систему спектральная плотность мощности процесса Y совпадает с точностью до погрешности оценки ковариационной матрицы с модулем передаточной функции системы, т.е.

$$diag\,|S_y| = diag\,|S_h|.$$

Это означает, что в этом случае сдвиговые свойства оператора системы и ковариационной матрицы, порождаемого системой процесса, совпадают.

Определим спектр S_x p -ичного нестационарного процесса x, как преобразование Виленкина-Крестенсона автокорреляционной матрицы $S_x = V^{-1}R_x V$ и докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. Спектральная плотность мощности p -ичного нестационарного процесса в базисе Виленкина-Крестенсона инвариантна к p -ичному сдвигу, т.е. $V^{-1}R_x V = diag/S_x/$.

Для доказательства теоремы представим ковариационную матрицу в виде [2]

$$R_x = xx^T. \tag{7}$$

Применив к выражению (7) преобразование Виленкина-Крестенсона с учетом теоремы 2 и ее следствия получим:

$$V^{-1}R_x V = V^{-1}xW^{-1}x^T V = diag S_x diag S_x^* = diag /S_x/,$$

т.е. спектр мощности нестационарного случайного процесса не зависит от времени, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Взаимная спектральная характеристика p-ичного нестационарного процесса в базисе Виленкина-Крестенсона инвариантна к p -сдвигу, т.е. $V^{-1}R_{xy} V = diag S_y diag S_x^* = diag S_{xy}$.

Доказанные теоремы свидетельствуют о том, что преобразование Виленкина-Крестенсона является собственным для класса дискретных p -ичных систем и порождаемых ими процессов. Это позволяет производить спектральный анализ p -ичных нестационарных процессов в рамках стационарной теории.

Л и т е р а т у р а

1. Д р а г а н Я.П. Модели сигналов в линейных системах. Киев, 1972.
2. Ч е г о л и н П.М. и др. Спектральные модели нестационарных случайных процессов. Труды X Всесоюзного симпозиума "Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей". Ленинград, 1978.
3. В и л е н к и н Н.Я. Об одном классе ортогональных систем. Известия АН СССР, сер. мат., № 11, 1947.