М.А. Голуб

СХОДЯЩАЯСЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПОЛЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОЗМУЩЕННОГО БАЗИСА

(Куйбышев)

Удобным способом измерения и анализа многомерного поля $\xi(\vec{x}) \in L_2(G)$ [I] является оценивание первых $L \geqslant I$ коэффициентов [2] $\mathcal{E}_L = (\xi_K)_1^L$:

$$\xi_K = (\xi, \psi_K) \tag{I}$$

разложения поля

$$\xi(\vec{x}) = \sum_{K=1}^{\infty} \xi_K \psi_K(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G \tag{2}$$

по ортонормированному базису $\{\psi_K(\vec{x})\}_1^{\infty} \subset L_2(G)$ $(\cdot, \cdot)$.

Здесь $\|\cdot\|$ – символы скалярного произведения и нормы в $L_2(G)$;

G – область в n -мерном евклидовом пространстве R^n.

Оценка $\mathcal{E}_L$ является сходящейся по критерию

$$\varepsilon_d^2(L) = \left\| \xi(\vec{x}) - \sum_{K=1}^{L} \xi_K \psi_K(\vec{x}) \right\|^2 = \sum_{K=L+1}^{\infty} \lambda_K ; \tag{3}$$

$$\lambda_K = |\xi_K|^2, \tag{4}$$

т.е. $\lim\limits_{L \to \infty} \varepsilon_d^2(L) = 0$.

Базисные функции $\{\psi_K(\vec{x})\}_1^L$ реализуются методами цифровой голографии [3] в виде пространственных фильтров с амплитудным пропусканием, пропорциональным "возмущенным" базисным функциям:

$$\varphi_K(\vec{x}) = \psi_K(\vec{x}) + h_K(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G \tag{5}$$

соответственно. Здесь $\{h_K(\vec{x})\}_1^L$ – возмущения, вызванные дискретным представлением базисных функций в виде машинных голограмм. Операция (I) выполняется в когерентно-оптическом процессоре [4]. При этом вместо $\mathcal{E}_L$ формируется "возмущенный" вектор $D_L = (\varphi_K)_1^L$:

$$\varphi_K = (\xi, \varphi_K). \tag{6}$$

Оценка D_L не является сходящейся, так как с ростом L накапливаются погрешности возмущений базисных функций. В данной работе строится сходящаяся оценка $\hat{\xi}_L = (\hat{\xi}_k)_1^L$, использующая возмущенный вектор D_L.

Для построения оценки $\hat{\xi}_L$, сходящейся по критерию

$$\varepsilon^2(L) = \| \xi(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{L} \hat{\xi}_k \psi_k(\vec{x}) \|^2, \tag{7}$$

найдем линейную аппроксимацию сходящейся оценки $\hat{\xi}_L$ с помощью возмущенного вектора D_L.

Доопределим систему возмущений $\{h_k(\vec{x})\}_1^L$ до бесконечной системы $\{h_k(\vec{x})\}_1^\infty$ согласно формулам:

$$h_{L+1}(\vec{x}) = h_{L+2}(\vec{x}) = \dots = 0. \tag{8}$$

Введем матрицу возмущений:

$$H = [H_{ik}]_1^\infty, \quad H_{ik} = (h_i, \psi_k) \tag{9}$$

и ее конечномерную подматрицу $H_L = [H_{ik}]_1^L$.

Далее будем применять обычные обозначения [1] операций транспонирования (T), эрмитова сопряжения ($*$), комплексного сопряжения (черта) матриц, а также символы норм $\|\cdot\|_L$, $\|\cdot\|$ векторов в R^L и ℓ_2, соответствующих норм $\|\cdot\|_L$, $\|\cdot\|$ и абсолютных норм $a(\cdot)$ матриц размера $L \times L$ и бесконечных матриц соответственно. Например,

$$a(H) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |H_{ik}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad a(H_L) = \Big(\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} |H_{ik}|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

причем

$$\|H_L\| < \|H\| \leqslant a(H), \quad \|H_L\| \leqslant a(H_L). \tag{10}$$

Лемма I. Пусть выполнено условие малости возмущений

$$\|H\| < 1, \tag{11}$$

тогда имеет место представление

$$\xi_L = D_L + \sum_{r=1}^{\infty} (-\bar{H}_L)^r D_L + D_0, \tag{12}$$

где вектор D_0 выражается через коэффициенты $\xi_{L+1}, \xi_{L+2}, \dots$ и элементы матрицы возмущений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим возмущенную сис-

[ф]ому $\{\varphi_K(\vec{x})\}_1^L$ до бесконечной системы $\{\varphi_K(\vec{x})\}_1^\infty$ по форму[л]ам (8) (5). Согласно результатам [5], имеет место биортогональ[н]ое разложение в L_2 (G):

$$f(\vec{x})=\sum_{K=1}^{\infty}\xi_K f_K(\vec{x})\,;\quad \xi_K=(\xi,\varphi_K)\,;\quad K=1,2,\ldots, \tag{13}$$

[г]де система функции $\{f_K(\vec{x})\}_1^\infty$ представляется в виде

$$f_K(\vec{x})=\psi_K(\vec{x})+S_K(\vec{x})\,;\quad K=1,2\ldots, \tag{14}$$

[а] система $\{S_K(\vec{x})\}_1^\infty$ вполне определяется бесконечной матрицей:

$$S=\left[S_{iK}\right]_1^\infty,\quad S_{iK}=(S_i,\psi_K), \tag{15}$$

[п]ричем

$$S=\sum_{r=1}^{\infty}(-H^*)^r. \tag{16}$$

[В] силу равенств (8), (5) (14), (16) бесконечные матрицы H , S [р]азбиваются на клетки вида

$$S=\left(\begin{array}{c|c} S_L & 0 \\ \hline \hat{S} & 0\end{array}\right)\quad H=\left(\begin{array}{c|c} H_L & \hat{H} \\ \hline 0 & 0\end{array}\right), \tag{17}$$

где $$S_L=\sum_{r=1}^{\infty}(-H_L^*)^r, \tag{18}$$

[а] разложение (13) принимает вид

$$f(\vec{x})=\sum_{K=1}^{L}\xi_K\psi_K(\vec{x})+\sum_{i=1}^{L}\psi_i(\vec{x})\sum_{K=1}^{L}S_{Ki}\xi_K+\sum_{i=1}^{L}\psi_i(\vec{x})\sum_{K=L+1}^{\infty}\xi_K S_{Ki}+ \\ +\sum_{K=L+1}^{\infty}\xi_K\psi_K(\vec{x}). \tag{19}$$

Приравнивая коэффициенты при $\psi_K(\vec{x}),\ K=1,\ldots,L$ в равенствах (19) и (2), в обозначениях

$$\tilde{S}_L=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \hat{S} & 0\end{array}\right)\quad \tilde{H}_L=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \hat{H} \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\quad \tilde{\xi}_L=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \xi_{L+1}\\ \xi_{L+2}\\ \vdots\end{pmatrix}, \tag{20}$$

получаем:

$$\xi = D_L+S_L^T D_L+\Pi_L\left[\tilde{S}_L^T\tilde{\xi}_L\right], \tag{21}$$

где Π_L - оператор проектирования из l_2 в R^L.
Обозначая $D_0=\Pi_L\left[\tilde{S}_L^T\tilde{\xi}_L\right]$ и подставляя в (21) равенство (18), получаем выражение (12). Теорема доказана.

1/2 18-4834

Замечание. Используя неравенство (10), а также равенство Парсеваля [1] и определение (8), получаем, что для выполнения условия малости возмущений (11) достаточно удовлетворить неравенству

$$a^2(H) = \sum_{k=1}^{L} \|h_k\|^2 < 1. \qquad (22)$$

Представление (12) позволяет построить следующую линейную аппроксимацию вектора $\mathcal{E}_L$ через возмущенный вектор D_L :

$$\mathcal{E}_L \cong D_L^{(P)} = (\varsigma_k^{(P)})_1^L , \qquad (23)$$

где $P \geq 0$ – целое число,

$$D_L^{(0)} = D_L ; \quad D_L^{(P)} = S_L^{(P)T} D_L ; \; P \geq 1 ; \qquad (24)$$

$$S_L^{(P)} = \sum_{r=1}^{P} (-H_L^*)^r . \qquad (25)$$

Операцию (24) назовем линейной коррекцией порядка P вектора D_L . Значение $P = 0$ соответствует отсутствию собственно коррекции. Уравнения (24) удобно записывать в рекуррентном виде:

$$D_L^{(0)} = D_L ; \quad D_L^{(r)} = (-\bar{H}_L) D_L^{(r-1)} + D_L ; \; r = 1, \ldots, P . \qquad (26)$$

Для исследования свойств аппроксимации (23) оценим погрешность:

$$\varepsilon^2(L,P) = \| \xi(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{L} \varsigma_k^{(P)} \psi_k(\vec{x}) \|^2 . \qquad (27)$$

Теорема 1. В условиях леммы 1 погрешность (27) удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^2(L,P) \leq \varepsilon_d^2(L) + [\varepsilon_0(L,P) + \varepsilon_h(L,P)]^2 , \qquad (28)$$

где

$$\varepsilon_h^2(L,P) = \|H_L\|_L^{2p+2} \cdot \sum_{k=1}^{L} \lambda_k \leq a^{2p+2}(H) \sum_{k=1}^{L} \lambda_k \qquad (29)$$

– погрешность возмущений базисных функций;

$\varepsilon_d^2(L)$ – погрешность (3) невозмущенной оценки $\mathcal{E}_L$,

$$\varepsilon_0^2(L,P) \leq \left[\frac{1 - \|H_L\|_L^{P+1}}{1 - \|H_L\|_L} \right]^2 \left[a^2(H) - a^2(H_L) \right] \varepsilon_d^2(L) . \qquad (30)$$

Доказательство. Используя ортогональность базисных функций, получаем:

$$\varepsilon^2(L,P) = \varepsilon_d^2(L,P) + \| D_L^{(P)} - \mathcal{E}_L \|_L^2 . \qquad (31)$$

Используя обозначения (20), равенства (6), можно переписать в виде

$$D_L = (E_L + \bar{H}_L)\,\mathscr{E}_L + \Pi_L\left[\tilde{\bar{H}}_L \tilde{\mathscr{E}}_L\right]. \tag{32}$$

Подставляя выражение (32) в (24), получаем:

$$D_L^{(P)} = \mathscr{E}_L - (-\bar{H}_L)^{P+1}\,\mathscr{E}_L + \left[E_L + S_L^{(P)T}\right]\Pi_L\left[\tilde{H}_L \tilde{\mathscr{E}}_L\right]. \tag{33}$$

Подставляя выражение (33) в (31) с учетом оценки

$$\left\|\Pi_L\left[\tilde{\bar{H}}\tilde{\mathscr{E}}_L\right]\right\|_L^2 = \left\|\tilde{\bar{H}}_L \tilde{\mathscr{E}}_L\right\| \leqslant \left\|\tilde{H}_L\right\|^2 \left\|\mathscr{E}_L\right\|^2 \leqslant a^2(\tilde{H}_L)\sum_{K=L+1}^{\infty}\left|\mathscr{E}_K\right|^2 = \left[a^2(H) - a^2(H_L)\right]\varepsilon_d^2(L) \tag{34}$$

и обозначений (29), (30), (3), получаем выражение (28). Теорема доказана.

Из формул (3), (29), (30) видно, что при фиксированном P погрешности $\varepsilon_d^2(L)$ и $\varepsilon_0^2(L,P)$ монотонно убывают с ростом L, а погрешность $\varepsilon_h^2(L,P)$ – монотонно возрастает, причем

$$\lim_{L\to\infty}\varepsilon_d^2(L) = \lim_{L\to\infty}\varepsilon_0^2(L) = 0;\quad \lim_{L\to\infty}\varepsilon_h^2(L,P) = \varepsilon_h^2(\infty,P) \neq 0. \tag{35}$$

Следовательно, суммарная погрешность $\varepsilon^2(L,P)$ имеет минимум при $L = L_0(P)$,

$$L_0(P) = \text{макс}\left\{L \,\middle|\, \varepsilon^2(L-1,P) \geqslant \varepsilon^2(L,P)\right\}, \tag{36}$$

монотонно убывая при $L < L_0(P)$ и возрастая при $L > L_0(P)$ так, что

$$\lim_{L\to\infty}\varepsilon^2(L,P) = \varepsilon_h^2(\infty,P) \neq 0$$

(в частности, при $P = 0$ получаем высказанное выше утверждение об отсутствии сходимости оценки D_L). Из выражения (35) очевидно, что

$$\lim_{P\to\infty} L_0(P) = \infty;\quad \lim_{P\to\infty}\varepsilon^2(L_0(P),P) = 0. \tag{37}$$

Для фиксированного $L \geqslant 1$ выберем порядок коррекции $P = P_0(L)$ по формуле

$$P_0(L) = \text{мин}\left\{P \,\middle|\, L_0(P) \geqslant L\right\}. \tag{38}$$

Тогда из выражения (37) следует, что

$$\lim_{L\to\infty} P_0(L) = \infty,\quad \lim_{L\to\infty}\varepsilon^2(L, P_0(L)) = 0, \tag{39}$$

т.е. оценка $\hat{\mathscr{E}}_L = D_L^{(P_0(L))}$ является сходящейся. Доказана следующая теорема

19-4834

Т е о р е м а 2. Пусть первые L коэффициентов разложения (2) формируются с использованием возмущенных базасных функций (5) (6), и возмущенный вектор D_L подвергается линейной коррекции (26) порядка $P=P_0(L)$, определяемого формулами (38), (36),(28)-(30), (3). Тогда оценка

$$\hat{\mathcal{E}} = D^{(P_0(L))} \qquad (40)$$

является сходящейся по критерию (7).

Л и т е р а т у р а

I. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. М., "Наука", I97I.
2. К л о в с к и й Д.Д., С о й ф е р В.А. Обработка пространственно-временных сигналов. М., "Связь", I976.
3. Г о л у б М.А., С о й ф е р В.А. Синтез пространственных фильтров для систем распознавания образов. Труды МФТИ, серия "Радиотехника и электроника". Долгопрудный, МФТИ, I977, с. I20-I25.
4. Г и б и н И.С., Н е ж е в е н к о Е.С., П о т а т у р и н О.И., Т в е р д о х л е б П.Е. Когерентно-оптические устройства для обобщенного спектрального анализа изображений. Автометрия, I972, № 5, с. 3-I0.
5. Г о л у б М.А., С о й ф е р В.А. Конструктивный подход к использованию разложения Карунева-Лоэва в устройствах оптимальной обработки сигналов. IУ Международный симпозиум по теории информации. Тезисы докладов, ч. I, М.-Л., ИППИ, I976, с. 3I-33.