

Сбор этой информации более труден, чем реализация ее в программах оптимизации КП и эффективности.

Уже существующие математические модели, построенные на использовании методов теории исследования операций, позволяют включить в них фактор КП при предварительном математическом моделировании и непосредственно при проектировании.

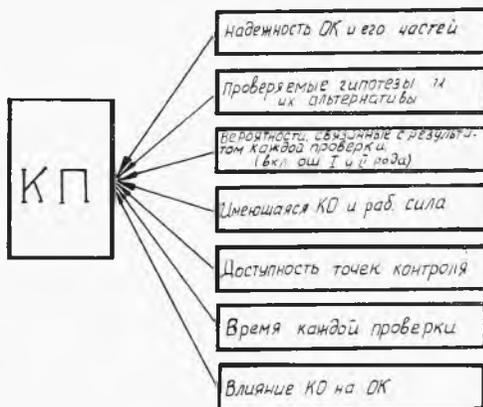


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Надежность и эффективность дискретных систем. Сб. статей «Наука», 1968 г.
2. Кузнецов П. И., Пчелинцев Л. А., Гайденко В. М. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969.
3. Ремонтпригодность радиоэлектронной аппаратуры. Сб. статей. М., «Советское радио», 1964.

А. М. Литвинов

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАНТИЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Наибольшее сокращение объема передаваемых данных и уменьшение содержащейся в них информации дают методы, которые обеспечивают предварительную обработку, сжатие и передачу только существенных параметров сигнала, действительно необходимых для осуществления контроля за состоянием объекта. К таким методам относится и квантильный метод сжатия информации, использующий для передачи существенных параметров сигнала, приема и статистической обработки данных выборочные квантили и их линейные комбинации.

Отдельные вопросы исследования квантильного метода обработки данных рассматривались Г. Крамером и Ф. Мостеллером [1,2]. Имеющиеся в работах И. Айзенбергера, Э. Познера (Калифорнийский технологический институт, США) [5,6] и Ю. Огава (Япония) [3,4] таблицы оптимальных и субоптимальных квантильных оценок числовых характеристик нормального распределения случайных величин рассчитаны с точностью до

(3÷4) десятичного знака и их нельзя использовать при выборках объемом более 10^3 , вследствие неоднозначности выделения выборочных квантилей. Последняя возникает из-за того, что число выборочных значений, соответствующее выборочной квантили z_i порядка p_i , является целым число $n_i = np_i$, где n — объем выборки, и выборочная квантиль Z_p ($0 < p_i < 1$) сможет принимать любое выборочное значение из интервала $\{x[np_i], x[np_i] + 1\}$. По условию однозначного определения квантили число выборочных значений n_i должно быть дробным числом [1].

Для того, чтобы устранить неоднозначность при расчете выборочных квантилей необходимо иметь величины порядков квантилей и коэффициентов их линейных комбинаций хотя бы на один порядок больше объема выборки.

В этом случае будет обеспечено условие, что $[np_i]$ не целое число, и существует единственная выборочная квантиль

$$Z_{p_i} = x_{[np_i]+1}.$$

Таким образом, при значительных задержках передаваемых данных, когда сеансы связи следуют через большие интервалы времени (несколько суток и более), квантильная обработка информации должна осуществляться по выборкам объемом 10^6 и более выборочных значений. В этом случае необходимо иметь линейные комбинации выборочных квантилей, рассчитанные с точностью до (7÷8)-го десятичного знака.

В данной работе вычислены и оформлены в виде таблиц оптимальные квантильные оценки математического ожидания и дисперсии распределений случайных величин с требуемой точностью. С той же точностью рассчитаны эффективности этих оценок при различном числе (2÷20) квантилей.

Методика этого расчета заключается в следующем. Первоначально определялись методом итераций оптимальные значения нормированных квантилей (λp_i) с точностью до (4—5) десятичного знака на УЦВМ «Днепр», а затем эти значения λp_i уточнялись с точностью до 7-го знака на клавишных счетных машинах. При расчетах были использованы полученные в работе [3] системы уравнений. После проведенных расчетов значения λp_i уточнялись с помощью восьмизначных таблиц Т. Л. Келли [7]. Затем по оптимальным восьмизначным значениям λp_i по таблицам вероятностных функций [8] были определены значения оптимальных порядков квантилей (p_i) и их плотностей (φ_i) с точностью до 7-го десятичного знака. Оптимальные значения λp_i , P_i , φ_i необходимы для вычисления квантильных оценок математического ожидания и стандартного отклонения, сведены соответственно в таблицы 1 и 2.

Сводные числовые данные по оптимальным квантильным оценкам математического ожидания и стандартного отклоне-

Оптимальные порядки, плотности квантилей для оценок математического

Число квантилей (K)	1	2	3	4	5	6
P_1	0,5000000	0,2706309	0,1630499	0,1067493	0,0739485	0,0550215
λ_1	0,000000	0,61009331	0,98220270	1,24372715	1,44663207	1,59819314
Φ_1	0,39894228	0,3312147	0,2463257	0,1840208	0,1400378	0,1112761
P_2		0,7290691	0,5000000	0,3512307	0,2549479	0,1948945
λ_2		0,61009331	0,0000000	0,38208274	0,65883769	0,85998012
Φ_2		0,3312147	0,39894228	0,3703712	0,3210755	0,2756182
P_3			0,8369501	0,6487693	0,5000000	0,3951196
λ_3			0,98220270	0,38208274	0,0000000	0,26605091
Φ_3			0,2463257	0,3703712	0,39894228	0,3850752
P_4				0,8932502	0,7450521	0,6048804
λ_4				1,24372715	0,65883769	0,26605091
Φ_4				0,1840208	0,3210755	0,3950752
P_5					0,9260515	0,8051055
λ_5					1,44663207	0,85998012
Φ_5					0,1400378	0,2756182
P_{11}						0,9449785
λ_{11}						0,59819314
Φ_{11}						0,1112761
P_7						
λ_7						
Φ_7						
P_8						
λ_8						
Φ_8						
P_9						
λ_9						
Φ_9						
P_{10}						
λ_{10}						
Φ_{10}						
P_{12}						
P_{13}						
P_{14}						
P_{15}						
P_{16}						
P_{17}						
P_{18}						
P_{19}						
P_{20}						

ния, а также по эффективностям этих оценок, рассчитанным с точностью до 7-го десятичного знака, представлены соответственно в таблицах 3 и 4. Эти таблицы могут быть применены для статистической обработки телеметрической информации. При этом выделение выборочных квантилей и расчет квантильных оценок смогут осуществляться по выборкам объемом не более 10^6 выборочных значений случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Математические методы статистики, пер. с англ., ИЛ, 1948.
2. F. Mosteller. On some useful «inefficient» statistics», Annals of Mathematical Statistics, 17(1946), p.p. 377—408.
3. Juniro Ogawa. «Contributions to the theory of systematic statistic. I». Osaka, Mathematical Journal, vol. 3(1951), p.p. 175—213.

ожидания нормального распределения при минимуме дисперсии D ($m^2_{кв}$)

8	10	12	14	16	18	20
0,0310207	0,0200363	0,0135179	0,0086798	0,0073031	0,0058677	0,0044745
-1,86629574	-2,05374891	-2,21151781	-2,37814462	-2,44215195	-2,52408463	-2,61972771
0,0699541	0,0484927	0,0346243	0,0235469	0,0203284	0,0166701	0,0130962
0,1151697	0,0760719	0,0525088	0,0350704	0,0276825	0,029126	0,0175155
-1,20035886	-1,43180373	-1,62108225	-1,81061802	-1,91572585	-1,99723187	-2,10835841
0,1941861	0,1430944	0,1072332	0,0773976	0,0636330	0,0543156	0,0432495
0,2469876	0,1672724	0,1178111	0,0813572	0,0619021	0,0531553	0,0428983
-0,68396067	-0,96488982	-1,18605647	-1,39571611	-1,53901760	-1,61551137	-1,71798144
0,3157304	0,2504362	0,1974566	0,1505671	0,1220653	0,1082782	0,0912000
0,4121569	0,2880809	0,2075362	0,1484741	0,1159477	0,091437	0,0827209
-0,22188938	-0,55894391	-0,81512634	-1,0488836	-1,21124897	-1,29767220	-1,38713697
0,3892317	0,3412367	0,2862038	0,2315723	0,1916280	0,1718144	0,1524646
0,5878431	0,4270067	0,3163251	0,2342260	0,1800958	0,1541015	0,1354483
0,22188933	-0,18401715	-0,47807053	-0,72508481	-0,91498406	-1,01900625	-1,10122212
0,3892317	0,3922458	0,3558733	0,3067412	0,2624877	0,2373738	0,2176126
0,7530124	0,5729933	0,4372284	0,3335978	0,2601120	0,2212436	0,1951703
0,68396067	0,18401715	-0,15807208	-0,42999401	-0,64303715	-0,76814676	-0,85889219
0,3157304	0,3922458	0,3939936	0,3637136	0,3244373	0,2970513	0,2758553
0,8849303	0,7119191	0,5627716	0,4431451	0,3512307	0,2942528	0,2562339
1,20035886	0,55894391	0,15807208	-0,14311411	-0,38208274	-0,54115609	-0,65510524
1,20035886	0,3412367	0,3939936	0,3948841	0,3708712	0,3446317	0,3219204
1,1941861	0,8327276	0,6836749	0,5568549	0,4502618	0,3744842	0,3252744
0,9689793	0,96488982	0,47807053	0,14311418	-0,12490343	-0,35022206	-0,45292882
1,86629574	0,2504362	0,3558733	0,3948841	0,3958377	0,3790305	0,3600390
0,699541	0,9239281	0,7924638	0,6664022	0,5497382	0,4577912	0,3939648
	1,43180373	0,81512634	0,42999401	0,12490343	0,10597776	-0,26890862
	0,1430944	0,2862038	0,3637136	0,358377	0,3967073	0,3847664
	0,9799637	0,8821889	0,7657740	0,6487693	0,5422088	0,4637463
	2,05374891	1,18605647	0,72508481	0,38208274	0,10597776	-0,09111653
	0,0484927	0,1974566	0,3067412	0,3708712	0,3957073	0,3972910
		0,9474912	0,8515259	0,7398880	0,6255158	0,5362537
		0,9864821	0,9186428	0,8199042	0,7057462	0,6060352
			0,9649296	0,8870523	0,7787564	0,6777256
			0,9913202	0,9380979	0,8458985	0,7437661
				0,9723175	0,9028563	0,8048297
				0,9926969	0,9468447	0,8645517
					0,9770874	0,9172791
					0,9941323	0,9571017
						0,9824845
						0,9955255

4. Juniro Ogawa «Contributions to the theory of systematic statistic, II», Osaka, Mathematical Journal, vol. 4, № 1, May 1952, p.p. 41—61.

5. J. Eisenberger and E. C. Posner, «Systematic statistics used for data compression of space telemetry», J. American Statistical Association, vol. 60, № 309, p.p. 97—133, March, 1965.

6. E. C. Posner, «The use of Quantiles for space telemetry data compression», Proceedings of the 1964 National Telemetry Conference, Los Angeles, California, section 1—3(1—6).

7. Келли Т. Л., Статистические таблицы, выпуск 35, ВЦ АН СССР, М., 1968.

8. Таблицы вероятностных функций, том 2, ВЦ АН СССР, 1959.

Оптимальные порядки, плотности и значения оценок стандартного

Число квантилей (K)	1	2	3	4	5	6
P_1	0,0579753	0,0690372	0,0209758	0,0230214	0,0100093	0,0102247
λ_1	-1,57178682	-1,48252747	-2,03352015	-1,99539331	-2,32634787	-2,31890847
Φ_1	0,1159576	0,1328436	0,0504125	0,0545329	0,0266737	0,0271738
P_2		0,9309628	0,1180087	0,1269350	0,0528313	0,0560302
λ_2		1,48275247	$\pm 1,18504413$	-1,14068748	-1,61829053	-1,58926756
Φ_2		0,1328436	0,1976908	0,2080704	0,1077544	0,1128835
P_3			0,9790242	0,8730650	0,1630499	0,1710561
λ_3			2,03352015	1,14068748	$\pm 0,98220270$	-0,94982732
Φ_3			0,0504125	0,2080704	0,2463257	0,2540591
P_4				0,9769786	0,9471687	0,8289439
λ_4				1,99539331	1,61829053	0,94982732
Φ_4				0,0545329	0,10775444	0,2540591
P_5					0,9899907	0,9439698
λ_5					2,32634787	1,58926756
Φ_5					0,0276737	0,1128835
P_6						0,9897753
λ_6						2,31890847
Φ_6						0,0261738
P_7						
λ_7						
Φ_7						
P_8						
λ_8						
Φ_8						
P_9						
λ_9						
Φ_9						
P_{10}						
λ_{10}						
Φ_{10}						
P_{11}						
P_{12}						
P_{13}						
P_{14}						
P_{15}						
P_{16}						
P_{17}						
P_{18}						
P_{19}						
P_{20}						

Таблица 2

отклонения нормального распределения при минимуме дисперсии D ($\gamma_{\text{КВ}}$)

8	10	12	14	16	18	20
0,0055110	0,0033038	0,0022416	0,0015684	0,0011595	0,0007888	0,0044745
-2,54269882	-2,71638058	-2,84796329	-2,94784255	-3,03567237	-3,15590676	-2,61927271
0,0157672	0,0099791	0,0070310	0,0050823	0,0038565	0,0027075	0,0130962
0,0285856	0,0169609	0,0112152	0,0078245	0,0057685	0,0039303	0,0175155
-1,9017794	-2,12007169	-2,28351586	-2,41814171	-2,52608463	-2,66060674	-2,10835841
0,0653668	0,0420768	0,0294523	0,0214961	0,0164196	0,0116620	0,0432495
0,0850317	0,0494715	0,0320129	0,0221100	0,0161370	0,0111271	0,0428963
-1,37220381	-1,65069925	-1,85217986	-2,01218917	-2,14191901	-2,28692845	-1,71798144
0,1556523	0,1022649	0,0717986	0,0527068	0,0403212	0,0292511	0,0912000
0,2015775	0,1123739	0,07105210	0,0482564	0,0348389	0,0241341	0,0827209
-0,83591984	-1,21386311	-1,4683838	-1,66156513	-1,81450509	-1,97560087	-1,38713697
0,2812851	0,1909323	0,1358165	0,1002528	0,0769779	0,0567414	0,1524646
0,7984225	0,2272301	0,1371969	0,0914301	0,0647597	0,0454184	0,1453483
0,83591984	-0,74809974	-1,09298588	-1,33218319	-1,51568114	-1,69119273	-1,10122212
0,2812851	0,3015889	0,2195307	0,1643018	0,1264300	0,0954952	0,2176126
0,9149683	0,7727699	0,2488858	0,1591397	0,1106458	0,0773681	0,1951703
-1,37220381	0,7489974	-0,67795535	-0,99816367	-1,22281388	-1,42277980	-0,85889219
0,1556523	0,3015889	0,3170231	0,2424547	0,1888498	0,1449447	0,2758552
0,9714144	0,8876261	0,7511142	0,2666423	0,1785252	0,1240452	0,2562339
1,9017794	1,2138611	0,67795535	-0,62312863	-0,92109660	-1,15522086	-0,65510524
0,0653668	0,1909323	0,3170231	0,3285708	0,2610459	0,2047530	0,3219204
0,9944890	0,9505285	0,8628041	0,7333577	0,2823076	0,1910591	0,3252744
2,54269882	1,65069925	1,09298588	0,62312863	-0,57602246	-0,87384990	-0,45292882
0,0157672	0,1022649	0,2195307	0,3285708	0,3379604	0,2722930	0,3600390
	0,9830391	0,9289479	0,8408603	0,7176924	0,2921894	0,3939648
	2,12007169	1,4683838	0,99816367	-0,57602246	-0,54696904	-0,26890862
	0,0420768	0,1358165	0,2424547	0,3379604	0,3435086	0,3847663
	0,996962	0,9679871	0,9085699	0,8214748	0,7078106	0,4637463
	2,71638058	1,85217986	1,33218319	0,92109660	0,54696904	-0,09111653
	0,0099791	0,0717986	0,1643018	0,2610459	0,343086	0,3972990
		0,9887848	0,9517436	0,8893352	0,8089409	0,5362537
		0,9977584	0,9778900	0,9352403	0,8759548	0,6060352
			0,9921755	0,9651611	0,9226319	0,6747256
			0,9984316	0,9839630	0,9545816	0,7437661
				0,9942315	0,9758659	0,8048297
				0,9988405	0,9888729	0,8645517
					0,9960697	0,9172791
					0,9992112	0,9571017
						0,9824845
						0,9955255

Число квантилей К	Оптимальные квантили для оценки математического ожидания при минимуме дисперсии		Эффектив- ность оценок %
	$\hat{m}_1 = Zp_1 = Z\alpha, 5$	$\hat{m}_2 = 0, 5(Zp_1 + Zp_2) = 0, 5 [Z(0, 2709309) + Z(0, 7290691)]$. $P_1 + P_2 = 1$	
1			63,66196
2			80,98246
3			88,16122
4			92,00585
5			94,20224
6			95,59492
8			97,18796
10			98,07796
12			98,59380
14			98,92406
16			99,17630
18			99,31410
20			99,42560

	Оптимальные квантильные оценки стандартного отклонения ($\hat{\sigma}$ кв) при равномерном распределении D (σ кв)	$\hat{\sigma}$ кв (%)
2	$0,3372617 [Z(0, 9309628) - Z(0, 690372)] = \hat{\sigma}$	65, 18295
3	$0,0679511 \cdot \hat{m}_3 + 0,3083960 \cdot Z(0, 9790142) - 0,2542495 \cdot Z(0, 1180387) - 0,1209035 \cdot Z(0, 0209758)$	73, 58230
4	$0,1154360 [Z(0, 9769786) - Z(0, 0230214)] + 0,2364010 [Z(0, 8730650) - Z(0, 1269350)]$	82, 43039
5	$0,0237609 \cdot \hat{m}_4 + 0,1167045Z(0, 9899907) + 0,2296925Z(0, 09471687) - 0,1859041Z(0, 1630499) -$ $- 0,1258218Z(0, 1269350) - 0,05553903Z(0, 0100093)$	85, 88138
6	$0,05501949 [Z(0, 9897753) - Z(0, 0102247)] + 0,1263780 [Z(0, 9439698) - Z(0, 0560302)] +$ $+ 0,1806287 [Z(0, 8289439) - Z(0, 1710561)]$	89, 44280
8	$0,03074366 [Z(0, 9944890) - Z(0, 0055110)] + 0,07273010 [Z(0, 9714144) - Z(0, 0258566)] +$ $+ 0,1169446 [Z(0, 9149683) - Z(0, 0850317)] + 0,1471907 [Z(0, 7984225) - Z(0, 0201375)]$	92, 95003
10	$0,01921868 [Z(0, 9966962) - Z(0, 0033038)] + 0,04648993 [Z(0, 9830391) - Z(0, 0169609)] +$ $+ 0,07794720 [Z(0, 9505285) - Z(0, 0494715)] + 0,1059966 [Z(0, 8876261) - Z(0, 1123739)] +$ $+ 0,1228440 [Z(0, 7727699) - Z(0, 2272301)]$	95, 9639
12	$0,0134009 [Z(0, 9977584) - Z(0, 0022416)] + 0,03216869 [Z(0, 9887848) - Z(0, 01121152)] +$ $+ 0,05438435 [Z(0, 09679871) - Z(0, 0320129)] + 0,7685984 \cdot Z(0, 9289479) - Z(0, 0710521) +$ $+ 0,0953775 [Z(0, 8628031) - Z(0, 1371969)] + 0,1040503 [Z(0, 7511142) - Z(0, 2488358)]$	96, 26620
14	$0,00652612 [Z(0, 9984316) - Z(0, 0015684)] + 0,02357414 [Z(0, 9921755) - Z(0, 0678245)] +$ $+ 0,03993395 [Z(0, 9778909) - Z(0, 0221109)] + 0,05697939 [Z(0, 9517436) - Z(0, 0482564)] +$ $+ 0,07363077 [Z(0, 9085699) - Z(0, 0914301)] + 0,08597028 [Z(0, 8498603) - Z(0, 1591397)] +$ $+ 0,08983512 [Z(0, 7333577) - Z(0, 2666423)]$	97, 05264
16	$0,007349063 [Z(0, 9988405) - Z(0, 0011595)] + 0,01777099 [Z(0, 9942315) - Z(0, 0037685)] +$ $+ 0,03053435 \cdot Z(0, 9838630) - Z(0, 0161370) + 0,043993328 [Z(0, 9551611) - Z(0, 0348389)] +$ $+ 0,05699219 [Z(0, 9322403) - Z(0, 0647567)] + 0,06923655 [Z(0, 8893352) - Z(0, 1106648)] +$ $+ 0,07772744 [Z(0, 8214748) - Z(0, 1785253)] + 0,07844160 [Z(0, 7176924) - Z(0, 2823076)]$	97, 62530
18	$0,005070991 [Z(0, 9992112) - Z(0, 0007888)] + 0,01291404 [Z(0, 9959697) - Z(0, 0039303)] +$ $+ 0,02248442 [Z(0, 9888729) - Z(0, 0111271)] + 0,033373010 [Z(0, 9758659) - Z(0, 0241341)] +$ $+ 0,04482983 [Z(0, 9545816) - Z(0, 0454184)] + 0,05542766 [Z(0, 9226319) - Z(0, 0773681)] +$ $+ 0,065559540 [Z(0, 8759548) - Z(0, 1240452)] + 0,07159160 [Z(0, 8089409) - Z(0, 1910591)] +$ $+ 0,07162358 [Z(0, 7078106) - Z(0, 2921894)]$	98, 12195
20	$0,00420960 [Z(0, 9993679) - Z(0, 0006321)] + 0,01019376 [Z(0, 9969903) - Z(0, 0039997)] + 0,01841030 -$ $- Z(0, 0087270) + 0,02735252 [Z(0, 9809603) - Z(0, 0190397)] + 0,03633975 [Z(0, 9646967) - Z(0, 0353033)]$ $[Z(0, 9912730) + 0,045866074 [Z(0, 9402648) - Z(0, 0597352)] + 0,05355315 [Z(0, 9059130) - Z(0, 0940870)] +$ $+ 0,06387588 [Z(0, 8583644) - Z(0, 1416356)] + 0,06473450 [Z(0, 7918910) - (0, 2081090)] +$ $+ 0,06334329 [Z(0, 6953245) - Z(0, 3046755)]$	98, 44535