О.Н. Бесчастнов

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ СИГНАЛА ПРИ ЕГО ДЕЛЬТА-МОДУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

(Ленинград)

Предмет данного сообщения относится к обработке сигналов при использовании методов многоуровневой дельта-модуляции с параметрическим декодирующим фильтром [1], [2], [3]. В докладе исследуется погрешность этого рода аппроксимации на основе теории сплайнов. Для простоты рассуждений предполагаем, что программа изменения параметров фильтра задана заранее, что означает его настройку на предполагаемый класс сообщений. Будем считать, что выходной сигнал φ декодирующего устройства можно описать с помощью сплайн-функции, удовлетворяющей уравнению

$$\varphi'(t)+a(t)\varphi(t)=S(t), \quad \varphi(0)=0. \tag{1}$$

Естественно, считаем фильтр устойчивым, т.е. $a(t)\geqslant 0$. Частоту посылок в канале примем постоянной $(\Delta t'=t_{n+1}-t_n=const, n=0,1,\ldots)$. Назовем Δt шагом аппроксимации, а $[t_n, t_{n+1}]$ обозначим через Γ_n. Сигнал $S(t)$ на входе декодирующего фильтра примем составленным импульсами длительности Δt не обязательно прямоугольной формы. Пусть на Γ_n он описывается выражением

$$S(t)=S_{n+1}\mu_1\left(\frac{t-t_n}{\Delta t}\right)=S_{n+1}\mu_0(t),$$

где $\mu_0(t)$ – кусочно-непрерывная не отрицательная с периодом Δt функция, причем $\mu_0(t)\leqslant\mu$ $(\mu=const)$, а S_{n+1} при многоуровневой дельта-модуляции принадлежит некоторому конечному множеству $S_K=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ с $a_{s+1}>a_s$ $(s=1,2,\ldots,m-1)$ и $a_m=-a_1$.

Определенный интерес представляет предельный случай, когда $S_{n+1}\in[a_1, a_m]$, что соответствует особого рода амплитудно-импульсной модуляции $(a_m>0,\ a_1<0)$.

Дополнительно предполагаем, что алгоритм использует не точные значения исходного сигнала $f(t)$, а сумму с помехой $f^*(t)=f(t)+P(t)$, где считалось, что $|P(t)|\leqslant P_0=const$.

Класс аппроксимируемых сигналов $F_n(w, z)$ зададим соотношением

$$f'(t)+\alpha(t)f(t)=g(t),\ f(0)=0.$$

Кусочно-непрерывные функции $g(t)$ подчиним неравенству $|g(t)|\leqslant z(t)$, где функция $z(t)$ задана. Таким образом, класс сигналов $F_n(w,z)$ интерпретируется как реакция фильтра, описываемого уравнением (2) на ограниченные функцией $z(t)$ воздействия.

Алгоритм аппроксимации. Обозначая $\delta^*=f^*-\varphi$ погрешность аппроксимации суммы полезного сигнала и помехи, определим алгоритм так: выбор очередного S_{n+1} обеспечивает минимум $|\delta^*(t_{n+1})|$. Для получения формулы, определяющей S_{n+1}, запишем в интегральной форме решение уравнения (I):

$$\varphi(t)=w(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_{\tau}^{t}w(t,\theta)s(\theta)d\theta,\quad w(t,\tau)=exp\int_{t}^{\tau}\alpha(\theta)d\theta.$$

Отсюда для $\tau=t_n$, $t=t_{n+1}$

$$\delta^*(t_{n+1})=f^*(t_{n+1})-w(t_{n+1},t_n)\varphi(t_n)-S_{n+1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}w(t_{n+1},\theta)\mu_0(\theta)d\theta.$$

Так как последний интеграл (γ_{n+1}) положителен, то, обозначая первые два члена в правой части последнего равенства через ζ^*_{n+1}, получим, что минимум $|\delta^*(t_{n+1})|$ обеспечивается, если $S_{n+1}=\zeta^*_{n+1}/\gamma_{n+1}+\beta_{n+1}$, где β_{n+1} дополняет дробь до ближайшего a_s из S_K. Такой выбор возможен, если

$$a_m\geqslant\frac{\sup\limits_{n}\left\{w(t_{n+1},t_n)\left[p_0+\frac{\Delta a}{2}\gamma_{n+1}\right]+p_0+\int_{t_n}^{t_{n+1}}w(t_{n+1}\theta)z(\theta)d\theta\right\}}{\inf\limits_{n}\gamma_{n+1}},\qquad(3)$$

где $\Delta a=\max\limits_{s}(a_{s+1}-a_s)$, $s=1,2,\ldots,m-1$.

Цель исследования. Она состоит в получении оценок вида:

$$\sup_{p,g}|\delta(t_{n+1})|\leqslant\lambda_{n+1};\quad \sup_{p,g}|\delta(t)|\leqslant\lambda_n(t),\ t\in\Gamma_n;$$

$$\sup_{p,g,t\in\Gamma_n}|\delta(t)|\leqslant\lambda'_n;\quad \sup_{p,g,t\in\Gamma_n,n}|\delta(t)|\leqslant\lambda,$$

позволяющих, если это принципиально возможно, найти необходимый шаг аппроксимации Δt, при котором $|\delta(t)|$ не превышает допустимую погрешность.

Основные результаты. По методике, предложенной в работе [4], получены следующие оценки:

I. Если a_m удовлетворяет неравенству (3), то

$$\sup_{p,g}|\delta(t_{n+1})|\leqslant p_0+\frac{\Delta a}{2}\gamma_{n+1}.$$

2. При том же условии для a_m

$$\sup_{p,g,t\in\Gamma_n} |\sigma(t)| \leqslant$$

$$\text{макс}\left\{\text{макс}_{t\in\Gamma_n} \left\{w(t,t_n)\left[p_0+\frac{\Delta a}{2}\gamma_{n+1}\right]+\int_{t_n}^{t} w(t,\theta)z(\theta)d\theta+\frac{\Delta a}{2}\int_{t_n}^{t} w(t,\theta)\mu_0(\theta)d\theta\right\};\right.$$

$$\left.\text{макс}_{t\in\Gamma_n}\left\{\int_{t}^{t_{n+1}} w(t,\theta)z(\theta)d\theta+w(t,t_{n+1})p_0+\left(\frac{\Delta a}{2}+a_m\right)\int_{t_n}^{t} w(t,\theta)\mu_0(\theta)d\theta\right\}\right\}.$$

3. Получена грубая оценка, не зависящая от времени и более удобная для инженерных расчетов:

$$\sup_{p,g,t\in\Gamma_n,n} |\sigma(t)| \leqslant \bar{z}\frac{e^{\bar{\alpha}\Delta t}-1}{\bar{\alpha}}+\left(\frac{\Delta a}{2}+a_m\right)\int_0^{\Delta t} e^{\bar{\alpha}\theta}\mu_0(\theta)d\theta+p_0 e^{\bar{\alpha}\Delta t},$$

где $\bar{z}=\sup_t z(t)$, $\bar{\alpha}=\sup_t \alpha(t)$.

Кроме того, в докладе обсуждаются оценки при $\Delta t \to 0$, а также различные частные случаи.

Литература

1. Э б е й т Дж. Е. (*J. E. Abate*). Линейная и адаптивная дельта-модуляция. ТИИЭР, т. 53, 1967, № 3, с. 59-71 (русский перевод).
2. *C. J. Kikkert. Digital Techniques in Delta Modulation, IEEE Trans. on Communication Technology, v. com-19, № 4, Aug., 1971, p. 570-574.*
3. С и т н я к о в с к и й И.В., Ш м е л е в и ч М.С. Сравнительная оценка шумов квантования многоуровневой дельта-модуляции и ИКМ. Радиотехника, т. 29, 1974, № 6, с. 95-97.
4. М е н ь ш и к о в Г.Г. Двоичная аппроксимация: основы теории, применение к вопросам передачи сообщений. ЛЭИС, 1968.