А.Н. Коварцев.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА РЕАЛИЗАЦИЙ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ТИПА ИНТЕНСИВНОСТЬ

Проблема определения числа реализаций N в статистической модели является весьма важной, так как, с одной стороны, от N зависит время моделирования системы на ЭВМ, с другой, – точность и достоверность оценки моделируемого параметра. Для ряда оцениваемых параметров (вероятности отказов [I], среднего времени жизни [2] и т.д.) уже имеются достаточно простые выражения, определяющие N. Для других же параметров, например, интенсивности, число реализаций в модели вычисляется из функции заданной неявно относительно N [3], что вызывает значительные технические трудности при расчете N.

В данной статье предлагается использовать более простую формулу для определения числа реализаций в модели, когда оцениваемым параметром является интенсивность. В качестве оценки интенсивности λ выберем

$$\hat{\lambda} = N/\sum_{k=1}^{N} t_k , \qquad (I)$$

'де N – число реализаций в модели;

t_k – интервал времени между случайными событиями, представляющий собой случайную величину с математическим ожиданием I/λ и дисперсией I/λ^2.

Нашей задачей является определение такого N, чтобы λ в одели была оценена с точностью ε и достоверностью δ или

$$P\left\{ \left|\lambda - N/\sum_{k=1}^{N} t_k \right| < \varepsilon \right\} = \delta . \qquad (2)$$

Найдем закон распределения случайной величины $N/\sum^{N} t_k$. Для того рассмотрим случайную величину ξ, обратную $\hat{\lambda}$, т.е. $\xi = \frac{1}{N}\sum^{N} t_k$. Математическое ожидание и дисперсия определяются слеующим образом:

$$M\{\xi\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\{t_k\} = 1/\lambda . \qquad (3)$$

$$D\{\xi\} = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} D\{t_k\} = \frac{1}{N\lambda^2} . \qquad (4)$$

В силу центральной предельной теоремы (для независимых случайных величин t_k) величина ξ для больших N будет распределена но нормальному закону $F(x)$ со средним $1/\lambda$ и дисперсией $1/\lambda N^2$. Тогда закон распределения обратной величины $\hat{\lambda} = 1/\xi$ [4] при известном законе распределения $F(x)$ будет

$$F^*(x) = 1 - F(1/x). \tag{5}$$

Соотношение (2), учитывая (5), можно переписать в виде

$$F^*(\lambda+\varepsilon) - F^*(\lambda-\varepsilon) = \delta,$$

или

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda-\varepsilon}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda+\varepsilon}\right) = \delta, \tag{6}$$

где Φ (...) - интеграл вероятности нормального распределения со средним 0 и единичной дисперсией.

Уравнение (6) можно использовать для определения N, однако чтобы получить более простое выражение для N, в (6) произведе некоторые незначительные упрощения. Пренебрежем величиной ε в знаменателях аргумента функции Φ (...). Такое упрощение справедливо, так как относительная ошибка при вычислении левой части уравнения (6) меньше относительной ошибки от упрощения аргумента функции, а относительная ошибка δx может быть сделана сколь угодно малой. То есть

$$\delta\Phi'(x) < \delta x, \tag{7}$$

где $\delta\Phi(x)$ - относительная ошибка при вычислении левой части уравнения (6);

δx - относительная ошибка при аппроксимации аргумента.

Покажем это.

Пусть $x = \dfrac{\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda-\varepsilon}$ - реальное значение аргумента;

$x_A = \dfrac{\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda}$ - его аппроксимация, тогда

абсолютная ошибка данной аппроксимации

$$\Delta x = \frac{\varepsilon^2\sqrt{N}}{\lambda(\lambda-\varepsilon)},$$

и относительная

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\varepsilon}{\lambda} . \qquad (8)$$

Из выражения (8) видно, что наше приближение тем лучше, чем точнее оценивается λ (например, при соотношении ε/λ = I/IO относительная ошибка δx составляет 0,I%).

Далее, рассмотрим относительную ошибку функции:

$$\delta\Phi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(x+\Delta x)}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - \Phi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\delta x}{\Phi(x)} = \qquad (9)$$

$$= \frac{f(x)\, x\, \delta x}{\Phi(x)} ,$$

где $f(x)$ - плотность нормального распределения.

Учитывая, что $\delta\Phi(-x) = \delta\Phi(x)$, далее будем рассматривать случай, когда $x \geqslant 0$.

Из выражения (9) видно, что

1. При $x = 0$ $\qquad \delta\Phi(x) = 0$
2. При $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \delta\Phi(x) = \frac{\delta x}{\Phi(\infty)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x = \frac{\delta x}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x e^{x^2/2}} = 0 ,$$

откуда $\qquad \delta\Phi(\infty) = 0$

Тогда функция $\delta\Phi(x)$ имеет свое максимальное значение.

Очевидно, что

$$\delta\Phi(x) < \frac{f(x)\, x\, \delta x}{0,5} = \varphi(x) .$$

Функция $\varphi(x)$ достигает своего максимального значения при $x = 1$, тогда

$$\delta\Phi(x) < \varphi(1) = 0,483\, \delta x .$$

Из последнего неравенства следует справедливость неравенства (7).

Произведя предложенные упрощения в (6), получим следующее уравнение:

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\lambda}\right) - 1 = \delta ,$$

откуда

$$N = t_\alpha^2 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}, \qquad (10)$$

где t_α - квантиль нормального распределения, $\alpha = \frac{1+\sigma}{2}$.

Для практической реализации выражения (10) необходимо знать величину моделируемого параметра λ, который, как правило, является неизвестной величиной. Обычно из такой ситуации выходят путем замены точного значения параметра λ в (10) его оценкой, полученной в результате моделирования для 100-200 реализаций.

Можно предложить другой способ использования выражения (10) которое, в сущности, является критерием окончания моделирования. Для этого преобразуем равенство (10) в неравенство, заменив λ его оценкой $N / \sum_{K=1}^{N} t_K$:

$$\left(\sum_{K=1}^{N} t_K\right)^2 / N \geq t_\alpha^2 / \varepsilon^2. \qquad (11)$$

Окончание моделирования будем производить по выполнению неравенства (11). Очевидно, что при таком способе организации конца моделирования число "прогонов" через модель будет удовлетворять равенству (10), но по сравнению с первым способом определения конца моделирования (где λ в (10) заменяется ее оценкой для N = 100 ÷ 200 прогонов) $\hat{\lambda}$ будет оценена для больших значений N

Литература

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М., "Наука", 1968.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., "Советское радио", 1969.
3. Половко А.М., Малиновский И.М. Сборник задач по теории надежности. М., "Советское радио", 1972.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1., М., "Советское радио", 1969.