УДК 62.50I

В.А.Бурдастых, К.В.Исаев

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

(г. Ростов-на-Дону)

При проведении экспериментальных исследований часто встречае ся задача среднеквадратической аппроксимации зависимости, которая задается таблицей $\{t_k, x_k\}_0^m$, состоящей не менее чем из $2n+1$ пар чисел $(m \geqslant 2n)$, выражением вида

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\beta_i t), \qquad (I)$$

где α_0, α_i, β_i – оцениваемые параметры;
n – фиксированное натуральное число.

Не нарушая общности, будем считать, что $t_0 = 0$, $t_{k+1} > t_k$ ($k = 0, I, \ldots, m-1$).

Так как оцениваемые параметры входят в выражение (I) частичн нелинейным образом, то при решении сформулированной задачи возникают определенные трудности, характерные для задачи среднеквадратической нелинейной аппроксимации и возрастающие с ростом n. Различные предложения, касающиеся путей преодоления этих трудностей, можно найти в работах [I-5]. Большая часть из них сводится тому, что вначале каким-либо способом независимо от α_0, α_i оценивают β_i, а затем, решая задачу среднеквадратической линейной аппроксимации, определяют оценки параметров α_0, α_i с использованием оценок β_i. Недостатки методов связаны с тем, что исходная задача среднеквадратической аппроксимации фактически заменяется некоторой другой, более простой задачей. При этом многие важные свойства МНК-оценок (оценок метода наименьших квадратов), связанные, в частности, с их статистической интерпретацией [6], при та ком подходе теряются.

Другая часть методов сводится к замене исходного соотношения (I) некоторым уравнением, линейным по оцениваемым параметрам и имеющим вид

$$f_0(x(\tau), t) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j f_j(x(\tau), t), \qquad (2)$$

где $f_j(x(\tau), t)$, $j = 0, I, 2, \ldots, 2n+1$ – функционалы от $x(\tau)$ параметрически зависящие от t [4,7]. При этом предполагается.

что при произвольных α_0, α_i, β_i существуют такие значения C_j, при которых функция (I) удовлетворяет уравнению (2). Существование линейных по параметрам функциональных уравнений вида (2), обладающих указанным свойством, следует из того, что экспоненты, входящие в выражение (I), являются собственными функциями линейных дифференциальных операторов. Наиболее просто это можно показать, применяя к соотношению (I) преобразование Лапласа, тогда

$$X(s)=\alpha_0\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{1}{s-\beta_i}, \tag{3}$$

где s - переменная Лапласа, $X(s)$ - изображения по Лапласу функции $x(\tau)$. Легко увидеть, что соотношение (3) эквивалентно, например, любому из следующих линейных по параметрам соотношений:

$$X(s)=\sum_{i=1}^{n}C_i\frac{1}{s^{i-1}}+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1+i}\frac{1}{s^i}X(s); \tag{4}$$

$$\frac{X(s)}{(s-b_1)(s-b_2)}=\sum_{i=1}^{n-1}C_i\frac{s}{(s-b_i)(s-b_{i+1})}+C_n\frac{1}{s-b_1}+C_{n+1}\frac{s}{s-b_n}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1+i}\frac{s}{(s-b_i)(s-b_{i+1})}X(s); \tag{5}$$

$$X(s)=C_1\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{n}C_{i+1}\frac{1}{s-b_i}+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1+i}\frac{1}{s-b_i}X(s), \tag{6}$$

где b_i - фиксированные различные константы.

Переводя соотношения (4-6) в пространство оригиналов, получаем соответствующие им линейные по параметрам уравнения вида (2), например, соотношение (6) приводит к уравнению

$$x(t)=C_1+\sum_{i=1}^{n}C_{i+1}\exp(b_i t)+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1+i}\int_0^t\exp(b_i(t-\tau))d\tau. \tag{7}$$

Оценивание параметров $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ производится по следующей схеме: вначале, решая задачу среднеквадратической линейной аппроксимации, получаем оценки параметров C_j формы (2), затем по этим оценкам из уравнений связи между C_j и $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ находим оценки $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$. Вычисление интегралов в правой части (7) при этом производится по данным $\{t_k, x_k\}$ одним из численных методов.

В случае (7) уравнения связи между C_j и $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ устанавливается из условия эквивалентности соотношений

$$s\prod_{i=1}^{n}(s-\beta_i)X(s)=\alpha_0\prod_{i=1}^{n}(s-\beta_i)+s\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(s-\beta_j), \tag{8}$$

$$s\Big(\prod_{i=1}^{n}(s-b_i)-\sum_{i=1}^{n}C_{n+1+i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(s-b_j)\Big)X(s)=C_1\prod_{i=1}^{n}(s-b_i)+s\sum_{i=1}^{n}C_{1+i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(s-b_j), \tag{9}$$

полученных путем приведения к общему знаменателю соотношений (3) (6) соответственно. Сравнивая выражения (8) и (9), легко видеть, что параметры β_i -корни полинома

$$s^n + \ell_1 s^{n-1} + \ldots + \ell_{n-1} s + \ell_n , \tag{10}$$

стоящего сомножителем при $X(s)$ в левой части (9). Коэффициенты этого полинома, как следует из (9), определяются по формуле

$$\ell_k = (-1)^k \Big(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1} \ldots \sum_{i_k = i_{k-1}+1}^{n} b_{i_k} + \sum_{i=1}^{n} c_{n+1+i} \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq i}}^{n} b_{j_1} \ldots \sum_{\substack{j_{k-1}=j_{k-2} \\ j_{k-1} \neq i}}^{n} b_{j_{k-1}} \Big), \tag{11}$$

$k = 1, 2, \ldots, n;$

и зависит от b_i и c_{n+1+i} . Приравнивая коэффициенты полиномов в правых частях (8) и (9), легко получить для определения α_0, α_i систему линейных уравнений. Коэффициенты этой системы вычисляют по значениям c_j , b_i , β_i .

Так как данные $\{t_k , x_k\}$, как правило, в точности не описываются функциональной зависимостью (I) и при вычислении функционалов $f_j(x(\tau), t)$ приходится пользоваться численными методами (например при использовании формы (7) производить численное интегрирование), то полученные рассмотренным выше методом оценки параметров $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ в общем случае не совпадают с МНК-оценкой и, следовательно, обладают всеми недостатками, связанными с отходом от метода наименьших квадратов.

Для решения задачи среднеквадратической аппроксимации нами предлагается следующая итерационная процедура.

I. Задаются начальные приближения β_i , которые присваиваются свободным параметрам b_i уравнения (7).

2. Вычисляются МНК-оценки параметров c_j формы (7).

3. По формуле (II) вычисляются коэффициенты полинома (I0) и определяются корни β_i . Если при заданной точности $\varepsilon > 0$ $\exists i : |c_{n+1+i}|$ то операции 2–3 повторяются с приближениями b_i , равным β_i . По достижении нужной точности ε находятся α_0, α_i.

<u>Примечание.</u> При выполнении п.3 может оказаться, что среди корней полинома (I0) имеются комплексно-сопряженные. Если число пар таких корней $k\,(2k \leqslant n)$ и принять $\beta_1 = \bar{\beta}_{k+1}$, $\beta_2 = \bar{\beta}_{k+2}$, ..., $\beta_k = \bar{\beta}_2$ то уравнение (7) следует записать в виде

$$x(t) = c_1 + \sum_{i=1}^{k} c_{i+1} \exp(\mathrm{Re}(b_i)t) \cos(\mathrm{Im}(b_i)t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} c_{1+k+i} \exp(\mathrm{Re}(b_i)t) \sin(\mathrm{Im}(b_i)t) + \sum^{n} c_i \exp(b_i t) +$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_{n+1+i} \int_0^t exp(Re(b_i)(t-\tau))sin(Jm(b_i)(t-\tau))x(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} c_{n+k+i+i} \int_0^t exp(Re(b_i)(t-\tau)cos(Jm(b_i)(t-\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{i=2k+1}^{n} \int_0^t exp(b_i(t-\tau))x(\tau)d\tau,$$

что значительно усложняет вычисления. Во избежание сложностей предлагается упрощенный алгоритм, отличающийся от основного пунктом 3:

3'. Если при заданной точности $\varepsilon>0$ $\exists i:|c_{n+1+i}|>\varepsilon$, то операции 2-3' повторяются с приближениями b_i, равными b_i+c_{n+1+i}. По достижении нужной точности ε находятся $\beta_i=b_i+c_{n+1+i}$ и α_0, α_i.

Легко проверить, что при задании выражения (1) всего с одной экспонентой основной и упрощенный алгоритмы совпадают. Многочисленные применения упрощенного алгоритма с двумя и тремя экспонентами показали, что если начальные приближения параметров β_i отличаются от истинных значений не более, чем на порядок, то сходимость, как правило, имеет место.

Описанная процедура позволяет свести к минимуму указанные выше недостатки известных методов. Действительно, из уравнения (7) и условия $|c_{n+1+i}|\to 0$ I,2,..., n следует, что оценки b_i, c_j параметров $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ сводятся к МНК-оценкам для выражения (I).

Литература

I. Хемминг Р.В. Численные методы.-М.:Наука, I972.

2. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная атематика.-М.:Мир, I969.

3. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений.-М.:Наука, I965.

4. Тютюнников П.Л. Определение коэффициентов суммы кспонент методом дополнительных интегральных переменных.- Вычислительная математика и математическая физика, I980, № 4, .84I-848.

5. Заикин П.Н., Моисеев В.Н. Устойчивый метод интерпретации данных изотропного анализа.- Вычислительная математика и математическая физика, I978, № 2, с.487-490.

6. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.-М.:Физматгиз. I958.

7. Haddad J.M. Numerical analusis in nonlinear viscoelasticity. J. of Engeneering, 1980, т.18, с.325-331.