УДК 621.391

А.А.Дегтярев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

(г. Куйбышев)

Описание непрерывной модели термодинамического об

Вопросы, связанные с представлением дискретных мо пространстве состояний, рассматривались в работах [I ,

Предположим, что изменение температурного состояни го ограниченного тела, имеющего форму плоского прямоуг описывается уравнением

$$c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(q\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right)+fu+\omega;$$

$$0<x<l_x;\quad 0<y<l_y;\quad 0<t\leq T.$$

Здесь u, q, c, f, ω – функции переменных x
u – температура, q – коэффициент теплопроводности, теплоемкость, $c>0$, f – коэффициент теплообмена бо верхностей с окружающей средой, ω – плотность распре источников тепла.

Зададим следующие краевые условия:

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y);\quad 0\leq x\leq l_x;\quad 0\leq y\leq l_y;$$

$$\left.\begin{aligned}&u|_{x=0}=\alpha(y,t);\quad u|_{x=l_x}=\beta(y,t);\quad 0<y<l_y;\\&u|_{y=0}=\gamma(x,t);\quad u|_{y=l_y}=x(x,t);\quad 0<x<l_x\end{aligned}\right\}$$

Предполагаем, что все функции, фигурирующие в (I), обладают требуемой теоремой существования и единственн пенью гладкости.

Рассмотрим приведение конечно-разностного аналога (I)-(3) к рекуррентному виду, используя при этом вектор запись в пространстве состояний.

Дискретизация. Представление разностной краевой задачи в пространстве состояний

Рассмотрим разбиение области $[0,l_x]\times[0,l_y]\times[0,T]$, равномерное по каждой координате, определив параметры дискретизации по осям: $h_x=l_x/N$; $h_y=l_y/M$; $\tau=T/K$, где N, M и K – целые числа.
Введем обозначение $\psi^k_{nm}=\psi(nh_x, mh_y, k\tau)$; $n=\overline{0,N}$; $m=\overline{0,M}$; $k=\overline{0,K}$.
Аппроксимацию производных осуществим по формулам:

$$(\partial u/\partial t)^k_{nm}=(u^{k+1}_{nm}-u^k_{nm})/\tau; \tag{4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^k_{nm}=\left[q^k_{n+1/2,m}(u^k_{n+1,m}-u^k_{nm})-q^k_{n-1/2,m}(u^k_{nm}-u^k_{n-1,m})\right]. \tag{5}$$

Аналогично для производных по " y ".
Разностную аппроксимацию задачи (I)-(3) проведем тремя способами [3, 4]: по явной схеме порядка $O(\tau+h_x^2+h_y^2)$, по неявной схеме порядка $O(\tau+h_x^2+h_y^2)$, по неявной схеме Кранка-Николсона порядка $O(\tau^2+h_x^2+h_y^2)$.
В каждом из случаев приведем задачу к рекуррэнтной форме в пространстве состояний.

Я в н а я с х е м а. Если для уравнения (I) использовать аппроксимацию производных (4), (5), то получим

$$c^k_{nm}(u^{k+1}_{nm}-u^k_{nm})/\tau=[q^k_{n+\frac12,m}(u^k_{n+1,m}-u^k_{nm})-q^k_{n-\frac12,m}(u^k_{nm}-u^k_{n-1,m})]/h_x^2+$$
$$+[q^k_{nm+1/2}(u^k_{nm+1}-u^k_{nm})-q^k_{nm-1/2}(u^k_{nm}-u^k_{nm-1})]/h_y^2+f^k_{nm}u^k_{nm}+w^k_{nm};$$
$$n=\overline{1,N-1};\quad m=\overline{1,M-1};\quad k=\overline{0,K}. \tag{6}$$

Краевые условия будут иметь вид

$$u^k_{0m}=\alpha^k_m;\ u^k_{Nm}=\beta^k_m;\ u^k_{n0}=\gamma^k_n;\ u^k_{nM}=\chi^k_n; \tag{7}$$

$$u^0_{nm}=\varphi_{nm}, \tag{8}$$

где $n=\overline{0,N}$; $m=\overline{0,M}$; $k=\overline{1,K}$.
Введем обозначение $\bar{U}^k_n=[u^k_{n1};u^k_{n2};\ldots;u^k_{n,M-1}]^T$. Аналогично вводятся обозначения $\bar\alpha^k$, $\bar\beta^k$ и $\bar\varphi_n$.

Теперь задачу (6)-(8) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\bar{U}^{k+1}_n=B^k_n\bar{U}^k_{n-1}+A^k_n\bar{U}^k_n+B^k_{n+1}\bar{U}^k_{n+1}+D^k_n+W^k_n, \tag{9}$$

где $n=\overline{1,N-1}$; $k=\overline{0,K}$;

$$\bar{U}_n^0 = \bar{\varphi}_n, \quad где\ n = \overline{0,N}; \tag{10}$$

$$\bar{U}_0^K = \bar{\alpha}^K, \ \bar{U}_N^K = \bar{\beta}^K, \quad где\ K = \overline{0,K}. \tag{11}$$

Здесь A_n^K – трехдиагональная, а B_n^K – диагональная матрицы размерности $(M-1)\times(M-1)$, $\mathcal{D}_n^K$ и W_n^K-$(M-1)$ – мерные векторы:

$$A_n^K = \begin{bmatrix} a_{n1}^K & v_{n2}^K & & 0 \\ v_{n2}^K & a_{n2}^K & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_{nM-1}^K \\ 0 & & v_{nM-1}^K & a_{nM-1}^K \end{bmatrix}; \qquad B_n^K = \begin{bmatrix} b_{n1}^K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nM-1}^K \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{D}_n^K = [v_{n1}^K \gamma_n^K, 0, \ldots, 0, v_{nM}^K \chi_n^K]^T;$$

$$W_n^K = \tau[w_{n1}^K / c_{n1}^K, \ldots, w_{nM-1}^K / c_{nM-1}^K]^T,$$

где

$$a_{nm}^K = 1 \cdot \tau[(q_{n+\frac{1}{2},m}^K + q_{n-\frac{1}{2},m}^K)/h_x^2 + (q_{nm+\frac{1}{2}}^K + q_{nm+\frac{1}{2}}^K)/h_y^2 - f_{nm}^K]/c_{nm}^K;$$

$$v_{nm}^K = \tau q_{n,m-\frac{1}{2}}^K / (h_y^2 c_{nm}^K); \qquad b_{nm}^K = \tau q_{n-\frac{1}{2},m}^K / (h_x^2 c_{nm}^K).$$

Теперь введем новый $(N-1)\times(M-1)$ –мерный вектор: $\hat{U}^K = [\bar{U}_1^K, \ldots, \bar{U}_{N-1}^K]^T$. Тогда задача (6)-(8) примет вид:

$$\begin{cases} \hat{U}^{K+1} = A^K \hat{U}^K + \mathcal{D}^K + W^K, & K = \overline{0,K}; \\ \hat{U}^0 = \hat{\varphi}. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь A^K, $\mathcal{D}^K$, W^K – клеточные матрицы:

$$A^K = \begin{bmatrix} A_1^K & B_2^K & & 0 \\ B_2^K & A_2^K & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{N-1}^K \\ 0 & & B_{N-1}^K & A_{N-1}^K \end{bmatrix}; \qquad W^K = [W_1^K, \ldots, W_{N-1}^K]^T;$$

$$\mathcal{D}^K = [\mathcal{D}_1^K + B_1^K \bar{\alpha}^K; \mathcal{D}_2^K; \ldots; \mathcal{D}_{N-2}^K; \mathcal{D}_{N-1}^K + B_N^K \bar{\beta}^K]^T.$$

Полученная форма записи (12) краевой задачи и есть разностное векторно-матричное уравнение теплопроводности в пространстве состояний при заданном начальном состоянии $\hat{U}^0$.

Н е я в н а я с х е м а . Эту схему легко получить из схемы задачи (6)-(8), если в правой части уравнения (6) вместо "K"

везде написать " $k+1$ ". Действуя по аналогии, получим форму записи разностной задачи теплопроводности в пространстве состояний

$$\begin{cases} P^{K+1}\hat{U}^{K+1} = \hat{U}^{K} + D^{K+1} + W^{K+1}, & k=\overline{0,K}; \\ \hat{U}^{o} = \Phi, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$P^{K} = \begin{bmatrix} p_1^K & -B_2^K & & & 0 \\ -B_2^K & p_2^K & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B_{N-1}^K \\ 0 & & & -B_{N-1}^K & p_{N-1}^K \end{bmatrix}.$$

Матрицы P_n^K аналогичны матрицам A_n^K и легко получаются из последних формальной заменой элементов a_{nm}^K и v_{nm}^K элементами p_{nm}^K и $(-v_{nm}^K)$ соответственно, где $p_{nm}^K = 2 - a_{nm}^K$.

Схема Кранка-Николсона. Эта схема, в отличии от двух предыдущих, аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности относительно τ :

$$c_{nm}^{K}(u_{nm}^{K+1} - u_{nm}^{K})/\tau = \frac{1}{2}\sum_{l=K}^{K+1}[q_{n+1/2,m}^{l}(u_{n+1,m}^{l} - u_{nm}^{l}) -$$
$$- q_{n-1/2,m}^{l}(u_{nm}^{l} - u_{n-1,m}^{l})]/h_x^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=K}^{K+1}[q_{nm+\frac{1}{2}}^{l}(u_{nm+1}^{l} - u_{nm}^{l}) -$$
$$- q_{nm-\frac{1}{2}}^{l}(u_{nm}^{l} - u_{nm-1}^{l})]/h_y^2 + f_{nm}^{K}u_{nm}^{K} + w_{nm}^{K}.$$

Рассматривая это разностное уравнение совместно с (7) и (8), придем к следующей матричной записи задачи в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \tilde{P}^{K+1}\hat{U}^{K+1} = \tilde{A}^{K}\hat{U}^{K} + R^{K} + W^{K}, & k=\overline{0,K}; \\ \hat{U}^{o} = \Phi. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\tilde{P}^K$, $\tilde{A}^K$, R^K - клеточные матрицы, аналогичные матрицам P^K, A^K и D^K.

Различные способы разностной аппроксимации задачи (I)-(3) не эквивалентны с точки зрения численной реализации на ЭВМ [3]. Явная схема, обладая сравнительной простотой численных алгоритмов, оказывается устойчивой лишь при определенных ограничениях на выбор параметров дискретизации. Аналогично тому, как это делается в [3], покажем, что явная схема будет устойчивой, если выполнимо условие

$$2\tau\,\|q/c\|\cdot(1/h_x^2 + 1/h_y^2) \le 1, \tag{15}$$

где $\|q/c\| = \max\limits_{n,m,k}(q_{nm}^{K}/c_{nm}^{K})$.

Перепишем уравнение (6) в виде:

$$u_{nm}^{k+1} = \{1-\tau[(q^k_{n+1/2,m} + q^k_{n-1/2,m})/h_x^2 + (q^k_{nm+1/2} + q^k_{nm-1/2})/h_y^2]/c^k_{nm}\}\, u^k_{nm} + b^k_{n+1,m} u^k_{n+1,m} + b^k_{nm} u^k_{n-1,m} + v^k_{nm+1} u^k_{nm+1} + v^k_{nm} u^k_{nm-1} + \tau(f^k_{nm} u^k_{nm} + w^k_{nm})/c^k_{nm}. \qquad (16)$$

Условие (15) гарантирует неотрицательность выражения в фигурных скобках уравнения (16), что позволяет прийти к неравенству

$$\|u^{k+1}\| \le (1+\tau\cdot\|f/c\|)\cdot\|u^k\| + \tau\cdot\|\omega/c\|,$$

где $\|u^k\| = \max\limits_{n,m} |u^k_{nm}|$.

Если учесть, что $\|u^0\| = \|\varphi\|$, окончательно получим

$$\|u\| \le [1+\tau\|f/c\|]^K (\|\varphi\| + T\|\omega/c\|.$$

Последнее неравенство доказывает устойчивость явной схемы при условии (15).

Неявная схема, обладая абсолютной устойчивостью, уступает по отношению вычислительных затрат явной схеме, а по отношению порядка аппроксимации – схеме Кранка-Николсона. Последняя же, будучи абсолютно устойчивой и обладая вторым порядком точности относительно τ, h_x и h_y, требует значительно большего объема вычислительных затрат, чем две первые схемы. Выбор аппроксимирующей схемы обусловливается в основном конкретной постановкой практической задачи.

Рассмотренный вопрос о представлении конечно-разностных аналогов математической модели термодинамического объекта в форме (12), (13) или (14) тесно связан с задачей восстановления случайных зашумленных полей по результатам наблюдений, описанных в [1], [2]. Каждое из этих соотношений можно рассматривать как уравнение состояния термодинамического объекта, которое, наряду с линейной моделью наблюдения, позволяет строить рекуррентные алгоритмы линейного оценивания температурных полей.

Использование известных двумерных дискретных преобразований позволяет диагонализировать пятидиагональные матрицы уравнений (12)-(14), что дает возможность применять скалярные алгоритмы рекуррентного оценивания для восстановления трехмерных пространственно-временных полей.

Литература

1. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в

связи и управлении.-М.:Связь, 1976.
2. Михайлов С.В., Сойфер В.А. Анализ алгоритма восстановления поля по данным многоканальной регистрации.-В сб.:Вопросы кибернетики. Автоматизация экспериментальных исследований.-М., 1979, с.45-55.
3. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы.-М.:Наука, 1977.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.-М.:Наука, 1980.

УДК 681.325.36

В.А.Смирнов

ФОРМИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ШУМОВ В СИСТЕМЕ КОМПЛЕКСНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

(г.Ленинград)

В настоящее время широко используются статистические методы моделирования при анализе и синтезе сложных систем, работающих в условиях различного рода помех как внутренних, так и внешних. Система комплексного моделирования динамических объектов, реализуемая на технических средствах аналоговой и цифровой вычислительной техники, включает в себя реальный элемент исследуемой системы. Разработка и эксплуатация таких систем позволяет решать как исследовательские, так и задачи испытаний серийных образцов реальных элементов. Ввод в систему реального элемента приводит к необходимости организации реального масштаба времени, что представляет собой сложную задачу в связи с естественными ограничениями ресурсов технических средств при необходимости обеспечения малой погрешности моделирования.

На этапе распределения функциональных модулей динамического объекта в системе комплексного моделирования и получения предварительных временных оценок и оценок загрузки памяти ЦВМ может возникнуть ситуация, когда некоторые модули нереализуемы с допустимой точностью в реальном масштабе времени на заданном комплексе технических средств. В таком случае одним из вариантов является