УДК 621.391

С.В.Михайлов

АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЯ

В литературе [1] исследовались характеристики калмановского фильтра при его использовании для восстановления полей параболического типа. В данной работе предлагается простая процедура выбора экономичной разностной схемы при ограничениях на точность аппроксимации на решетке и время установления фильтра (для систем реального времени).

Разностная аппроксимация одномерного параболического оператора позволяет перейти к каноническому уравнению в пространстве состояний [1]:

$$\bar{x}(k+1) = Q_1\bar{x}(k) + \bar{w}(k),$$
$$Q_1 = (1-2r)I + rP \qquad (1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$r = \tau/h^2$, τ, h - параметры дискретизации,

$$E\{\bar{w}(k)\bar{w}^T(k)\} = wI.$$

Ясно, что вариация параметров решетки вызывает изменения характеристического многочлена матрицы Q_1. Последний, в свою очередь, определяет динамические свойства системы (1), а, значит, и восстанавливающего фильтра.

Анализ времени установления

Инерционные свойства системы (1) определяет ее весовая функция. Последняя легко представима в обозначениях (1):

$$H(k) = Q_1^k. \qquad (2)$$

Редуцируем задачу к скалярной:

$$x(k+1) = \lambda_1 x(k) + w(k), \qquad (3)$$

где $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ собственные числа Q_1,

$$\lambda_i = (1-2r) + 2r\cos\frac{i\pi}{N+1}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Очевидно, системы (I) и (3) эквивалентны с точки зрения длительности переходного процесса, которую теперь легко вычислить в отсчетах дискретного времени из условия

$$\lambda_1^{\kappa} < \varepsilon, \qquad (4)$$

где $\varepsilon > 0$ - уровень усечения весовой функции.

Аналогичным образом определим инерционные характеристики фильтра Калмана для выражения (I). Модифицируя состояние $\bar{x}(\kappa)$ собственным преобразованием Q_1 $\bar{\bar{x}}(\kappa) = \Phi^T \bar{x}(\kappa)$, запишем в полуспектральной области дисперсионное уравнение

$$p_{ij}(\kappa+1) = \frac{(\lambda_i \lambda_j p_{ij}(\kappa) + w\delta_{ij}) v\delta_{ij}}{\lambda_i \lambda_j p_{ij}(\kappa) + w\delta_{ij} + v\delta_{ij}}, \quad i,j = \overline{1,N} \qquad (5)$$

$$[p_{ij}]_{NN} = \Phi^T E\left\{(\bar{x}-\hat{\bar{x}})(\bar{x}-\hat{\bar{x}})^T\right\}\Phi = diag(p_{11} \dots p_{NN}).$$

Здесь v - дисперсия аддитивного шума измерений.

Снова выберем из N уравнений самое инерционное и построим мажоранту:

$$\tilde{p}(\kappa+1) = \frac{\lambda_1^2 v}{w+v}\tilde{p}(\kappa) + \frac{wv}{w+v}, \qquad (6)$$

$$\tilde{p}(0) = p_{11}(0),$$

$$\tilde{p}(\kappa) > p_{11}(\kappa), \quad \kappa = 1,2,\dots$$

Теперь по выражению (4) легко определить время установления калмановского фильтра (оценка сверху).

В табл. I сведены времена установления системы (I) - T_1, дисперсии состояния T_2 и ошибки оценивания T_1 при различных параметрах решетки (ε = 0,00I). В табл. 2 представлены аналогичные характеристики для неявного шаблона, обладающего абсолютной устойчивостью при $r > 0$:

$$Q_2 \bar{x}(\kappa+1) = \bar{x}(\kappa) + \bar{w}(\kappa), \qquad (7)$$

$$Q_2 = (1+2z)I - zP,$$

$$\tilde{p}(\kappa+1) = \frac{v}{w+\lambda_1^2 v}\,\tilde{p}(\kappa) + \frac{w^2 v}{w+\lambda_1^2 v},$$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ - собственные числа Q_2,

$$\lambda_i = (1+2z) - 2z\cos\frac{i\pi}{N+1}, \quad i=\overline{1,N}.$$

Естественно, что при расчетах каждая точка параметрического пространства (z,N) приводилась в соответствие оазовому варианту (r = 0,I, τ = I, N = IO, $w = v$ = I) коррекцией возмущения (w).

Анализ реализационной сложности

Реализационная сложность оптимального фильтра $T_a(r,N)$ определялась как объем вычислений для получения оценок состояния на фиксированном интервале реального (не дискретного) времени (табл. 3). Как видим, в точке приведения (0, 5, IO) T_a для явной и неявной схем различна. Это связано с тем, что в первом случае априорная оценка состояния вычисляется по трем точкам (Q_1 - трехдиагональная), а во втором - по всему множеству N точек.

Анализ точности

Ошибка ограничения (аппроксимации) на шаблонах (I), (7) определяется следующим образом [2]:

$$\delta \leqslant \left(\frac{z}{2}M_2 + \frac{1}{12}M_4\right)h^2,$$

где

$$\underset{x,t}{\text{макс}}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leqslant M_2, \quad \underset{x,t}{\text{макс}}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqslant M_4.$$

Усиливая неравенство, получим:

$$\delta \leqslant \frac{6z+1}{12}h^2\,\text{макс}(M_2, M_4).$$

Функция δ протабулирована (табл. 4).

Выбор рациональных параметров алгоритма

При малых N ($N \leqslant 20$) величина времени установления, как видно из табл. I и 2, мала и удовлетворяет любым разумным ограничениям на этот показатель алгоритма ($T_3 < 30$). При этом процедура выбора рациональных параметров в пространстве (δ, T_a) заключается, по-существу, в выборе алгоритма, обладающего наименьшим показателем сложности T_a при заданном δ, и осуществляется по табл. 3, 4.

При больших N ($N \geqslant 50$) мала и удовлетворяет любым разумным ограничениям величина погрешности δ (табл. 4), но резко возрастает время установления T_3. При этом процедура выбора рационального (экономичного) алгоритма состоит в выборе наименее сложного алгоритма при заданном времени установления.

Литература

1. Михайлов С.В., Сойфер В.А. Анализ алгоритма восстановления поля по данным многоканальной регистрации. - В сб.: Вопросы кибернетики, вып. 62, 1979.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. 2. - М.: Наука, 1977.

Таблица I

r \ N		5	10	20	50	100
.1	λ_1	.9732	.9919	.9978	.9996	.9999
	T_1	255	850	3089	18207	71400
	T_2	128	425	1545	9104	35700
	T_3	5	10	31	173	682
.2	λ_1	.9464	.9838	.9955	.9992	.9998
	T_1	126	423	1543	9102	35698
	T_2	63	212	772	4551	17849
	T_3	3	7	17	89	343
.3	λ_1	.9196	.9757	.9933	.9989	.9997
	T_1	83	281	1028	6067	23798

Окончание табл. I

z \ N		5	I0	20	50	I00
.3	T_2	42	I4I	5I4	3034	II899
	T_3	3	5	I3	60	230
.4	λ_1	.8928	.9676	.99II	.9985	.9996
	T_1	6I	2I0	770	4550	I7848
	T_2	3I	I05	385	2275	8924
	T_3	3	5	I0	46	I73
.5	λ_1	.8660	.9595	.9888	.998I	.9995
	T_1	49	I68	6I6	3639	I4278
	T_2	25	84	308	I820	7I39
	T_3	3	4	9	38	I39

Таблица 2

z \ N		5	I0	20	50	I00
.5	λ_1	I.I340	I.0405	I.0II2	I.00I9	I.0005
	T_1	55	I74	622	3646	I4285
	T_2	28	87	3II	I823	7I43
	T_3	3	4	9	38	I39
.7	λ_1	I.I876	I.0567	I.0I56	I.0027	I.0007
	T_1	4I	I26	446	2605	I0204
	T_2	2I	63	223	I303	5I02
	T_3	3	4	7	28	I0I
.9	λ_1	I.24I2	I.0729	I.020I	I.0034	I.0009
	T_1	32	99	348	2027	7938
	T_2	I6	50	I74	I0I4	3969
	T_3	2	3	6	23	79
I.I	λ_1	I.2947	I.089I	I.0245	I.0042	I.00II
	T_1	27	8I	285	I659	6495
	T_2	I4	4I	I43	830	3248
	T_3	2	3	6	I9	65
I.3	λ_1	I.3483	I.I053	I.0290	I.0049	I.00I3
	T_1	24	69	242	I405	5496

Окончание табл. 2

z \ N		5	I0	20	50	I00
I.3	T_2	I2	35	I2I	703	2748
	T_3	2	3	5	I7	56
I.5	λ_1	I.40I9	I.I2I5	I.0335	I.0057	I.00I5
	T_1	2I	6I	2I0	I2I8	4764
	T_2	II	3I	I05	609	2382
	T_3	2	3	5	I5	49

Т а б л и ц а 3

	z \ N	5	I0	20	50	I00
Явная схема	.I	5.0	I6.	58.	33I.	I288.
	.2	2.5	8.I	29.	I66.	644.
	.3	I.7	5.4	I9.	II0.	429.
	.4	I.3	4.I	I4.	83.	322.
	.5	I.	3.3	I2.	66.	258.
Неявная схема	.5	I.3	5.0	20.	I25.	500.
	.7	.89	3.6	I4.	89.	357.
	.9	.69	2.8	II.	69.	278.
	I.I	.57	2.3	9.I	57.	227.
	I.3	.48	I.9	7.7	48.	I92.
	I.5	.4I	I.7	6.7	42.	I67.

Т а б л и ц а 4

z \ N	5	I0	20	50	I00
.I	I.	.25	.063	.0I0	.0025
.2	I.38	.34	.086	.0I4	.0034
.3	I.75	.44	.II	.0I8	.0044
.4	2.I3	.53	.I3	.02I	.0053
.5	2.50	.63	.I6	.025	.0063
.7	3.25	.8I	.20	.033	.008I
.9	4.00	I.00	.25	.040	.0I0
I.I	4.75	I.I9	.30	.048	.0I2
I.3	5.50	I.38	.34	.055	.0I4
I.5	6.25	I.56	.39	.063	.0I6