перимента результаты использованы при разработке математического обеспечения АСУ для экспериментов по контролю качества радиоэлектронной аппаратуры и метрологического эксперимента.

На базе категории статистических решений [2] для задач обработки и категории контактных моделей для задач подключения объекта к ИСУ построена модель предметной области ППП и выбран входной язык непроцедурного типа, ориентированный на пользователя и отражающий категорную структуру принятых классов моделей ППП и транслятор с входного языка разработаны для УВМ М-6000.

Литература

1. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий. М., "Наука", 1974, 256 с.
2. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., "Наука", 1972, 520 с.

П.М. Чеголин, В.Н. Пойда, В.С. Кончак, Р.Х. Садыхов

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

(Минск)

В системах управляемого эксперимента важное значение имеют спектральные методы исследования объектов, которые, как правило, по своей природе являются нестационарными. Применение традиционных методов Фурье - преобразования к анализу линейных нестационарных систем требует введения дополнительных понятий: мгновенный и текущий спектр [I], усредненная корреляционная функция и усредненный энергетический спектр [2], что приводит к усложнению анализа, вследствие чего возникают принципиальные трудности управления экспериментом.

Новый предлагаемый в данной работе подход к исследованию линейных нестационарных систем заключается в использовании метода собственных преобразований, суть которого состоит в следующем.

Соотношение, связывающее сигналы на входе и выходе дискретного линейного объекта, имеет вид

$$y = x L_h ,\qquad (1)$$

где L_h – оператор системы, x, y – матрицы, представляющие собой ансамбли реализаций на входе и выходе системы.

Оператор L_h представим как

$$L_h = \begin{bmatrix} \vec{h}_0 M_0 \\ \vec{h}_0 M_1 \\ \vdots \\ \vec{h}_0 M_{n-1} \end{bmatrix} ,\qquad (2)$$

где M_i – некоторый матричный оператор сдвига, трансформирующий импульсную переходную функцию системы $\vec{h}_0$ в зависимости от начала отсчета.

Т е о р е м а I. Если M_i – некоторый оператор произвольного i -го сдвига, а ψ – ортогональное преобразование, диагонализирующее M_i так, что

$$\psi^{-1} M_i \psi = diag\, \psi_i ,\qquad (3)$$

(ψ_i – i -ая функция преобразования ψ), то ψ – является собственным преобразованием оператора системы, т.е.

$$\psi^{-1} L_h \psi = diag\, S_h ,$$

(S_h – спектральное отображение оператора L_h или передаточная функция системы).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть оператор системы L_h удовлетворяет условию (2), а сдвиговые матрицы M_i – условию (3). Умножая оператор L_h слева и справа на матрицы преобразования ψ^{-1} и ψ, получим:

$$\psi^{-1} L_h \psi = \psi^{-1} \begin{bmatrix} \vec{h}_0 M_0 \\ \vec{h}_0 M_1 \\ \vdots \\ \vec{h}_0 M_{n-1} \end{bmatrix} , \quad \psi = \psi^{-1} \begin{bmatrix} \vec{h}_0 M_0 \psi \\ \vec{h}_0 M_1 \psi \\ \cdots \\ \vec{h}_0 M_{n-1} \psi \end{bmatrix} .\qquad (4)$$

Так как $\psi^{-1}\psi = E$ (единичная матрица), то выражение (4) запишем в виде

$$\psi^{-1} L_h \psi = \psi^{-1} \begin{bmatrix} \vec{h}_0 \psi \psi^{-1} M_0 \psi \\ \vec{h}_0 \psi \psi^{-1} M_1 \psi \\ \cdots \\ \vec{h}_0 \psi \psi^{-1} M_{n-1} \psi \end{bmatrix} .$$

Учитывая условие (3), получим:

$$\psi^{-1} L_h \psi = \psi^{-1} \begin{bmatrix} \vec{S_h}\, diag\, \psi_0 \\ \vec{S_h}\, diag\, \psi_1 \\ \cdots \\ \vec{S_h}\, diag\, \psi_{n-1} \end{bmatrix} = \psi^{-1} \begin{bmatrix} S_{h_0}\psi_{00} & S_{h_1}\psi_{01} & \cdots & S_{h(n-1)}\psi_{0(n-1)} \\ S_{h_0}\psi_{10} & S_{h_1}\psi_{11} & \cdots & S_{h(n-1)}\psi_{1(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{h_0}\psi_{(n-1)0} & S_{h_1}\psi_{(n-1)1} & & S_{h(n-1)}\psi_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \psi^{-1}\psi\, diag\, S_h = diag\, S_h,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Если сдвиговые свойства оператора системы и сигнала на ее входе совпадают, то матрица выходного сигнала диагонализируется собственным преобразованием ψ оператора системы.

Для доказательства теоремы 2 запишем выражение (I) в виде

$$Y = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 M_0 \\ \vec{x}_0 M_1 \\ \cdots \\ \vec{x}_0 M_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{h}_0 M_0 \\ \vec{h}_0 M_1 \\ \cdots \\ \vec{h}_0 M_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Умножая Y слева и справа на матрицы преобразования ψ^{-1} и ψ, с учетом теоремы I,будем иметь:

$$\psi^{-1} y \psi = diag\, S_x\, diag\, S_h = diag\, S_y, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Диагональная матрица S_y представляет собой комплексный спектр, полученный при разложении сигнала Y по собственным функциям оператора системы.

С л е д с т в и е. Комплексно-сопряженный спектр S_y^* является результатом собственного преобразования матрицы y^T.

Выполняя сопряжение в (5), получим

$$diag\, S_y^* = (\psi^{-1} y \psi)^{*T} = \psi^{-1} y^T \psi.$$

Т е о р е м а 3. Если сдвиговые свойства оператора системы и сигнала на ее входе совпадают, то ковариационная матрица выходного сигнала диагонализируется собственным преобразованием ψ оператора системы.

Запишем ковариационную матрицу выходного сигнала y в виде

$$R_{yy} = y y^T.$$

Применив к ковариационной матрице ψ -преобразование и используя результаты теоремы 2 и ее следствия, получим:

$$\psi^{-1}R_{yy}\psi = \psi^{-1}y\psi\psi^{-1}y^{T}\psi = diag\,S_y\,diag\,S_y^{*} = diag\,/S_y/.$$

Диагональная матрица $/S_y/$ является спектром мощности сигнала Y.

Нетрудно показать, что если выполняются условия теоремы 2 и 3, то собственное преобразование ψ диагонализирует ковариационную матрицу входного сигнала x, т.е.

$$\psi^{-1}R_{xx}\psi = diag\,/S_x/.$$

То обстоятельство, что собственное преобразование ψ оператора системы диагонализирует ковариационные матрицы входного и выходного сигналов свидетельствует о том, что оно является преобразованием Карунена-Лоэва.

Аналогично теоремам 2 и 3 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Если сдвиговые свойства оператора системы и сигнала на ее входе совпадают, то взаимная ковариационная матрица R_{xy} диагонализируется собственным преобразованием ψ оператора системы:

$$diag\,S_{xy} = \psi^{-1}R_{xy}\psi = \psi^{-1}yx^{T}\psi = diag\,S_y\,diag\,S_x^{*}. \quad (6)$$

На основании доказанных теорем может быть получено обобщение известной теоремы Винера-Хопфа в базисах собственных преобразований для временной и частотной областей.

Т е о р е м а 5. Взаимная спектральная матрица $diag\,S_{xy}$ двух нестационарных случайных процессов x и y, обладающих одинаковыми сдвиговыми свойствами, вычисляется в соответствии с выражением

$$diag\,S_{xy} = diag\,/S_x/\,diag\,S_h.$$

Для доказательства теоремы запишем взаимную ковариационную матрицу в виде

$$R_{xy} = YX^{T}. \quad (7)$$

Подставляя равенство (I) в (7), получим:

$$R_{xy} = XL_hX^{T}. \quad (8)$$

Применив к выражению (8) собственное преобразование ψ, с учетом теоремы I и коммутативности диагональных матриц будем иметь:

$$\psi' R_{xy}\psi = diag\, S_x\, diag\, S_h\, diag\, S_x^* = diag\, |S_x|\, diag\, S_h = diag\, S_{xy}. \qquad (9)$$

Обратное преобразование выражения (9) дает нам аналог теоремы Винера-Хопфа во временной области:

$$R_{xy} = R_{xx} L_h .$$

Из выражения (9) следует, что передаточная функция системы $diag\, S_h$ вычисляется из соотношения

$$diag\, S_h = diag\, S_{xy}\left[diag\, |S_x|\right]^{-1} = diag\, \frac{S_{xy}}{|S_x|} .$$

Частотную характеристику системы можно получить, если на ее вход подать "белый шум". В этом случае справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 6. Если случайный процесс Y является реакцией нестационарной системы на "белый шум", то

а) собственное преобразование оператора системы L_h диагонализирует ковариационную матрицу процесса y ;

б) спектральная плотность мощности случайного процесса равна модулю передаточной функции системы, т.е.

$$\psi' R_y \psi = diag\, |S_h|; \quad diag\, |S_y| = diag\, |S_h|.$$

Доказанные положения являются основой для построения общей теории анализа линейных нестационарных систем, из которой как частный случай вытекает теория, стационарных линейных объектов.

Л и т е р а т у р а

I. Fano R.M. Short-time Autocorrelation Function and Power Spectra. The Journal of the Acoustical Society of America, 1950, vol 22, N5.

2. Lampard D.J. Generalization of the Wiener-Khintchine Thearem to Nonstationary Processes. Journ. Appl. Phys, 1954, N6.

Б-4834