

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕЦ САТУРНА

Галкина Екатерина Андреевна, студентка Института Мехатроники и Робототехники Российского Государственного Университета имени Алексея Николаевича Косыгина;

Научный руководитель: Михеев Александр Александрович, доцент, кандидат физико-математических наук Государственного Университета имени Алексея Николаевича Косыгина.

В работе рассматривается решение задачи через построение математических моделей, в которых лежат фундаментальные законы природы, и тем самым моделируем движения колебаний колец Сатурна...

Ключевые слова: формы представления моделей, кольцо, колебательные явления.

SIMULATION OF SATURN'S RING OSCILLATIONS

Galkina Ekaterina Andreevna, student of the Institute of Mechatronics and Robotics of the Alexey Nikolaevich Kosygin Russian State University;

Academic adviser: Alexander A. Mikheev, Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences at the Alexey Nikolaevich Kosygin State University.

The paper considers the solution of the problem through the construction of mathematical models, which are based on the fundamental laws of nature, and thereby simulate the motion of the oscillations of the rings of Saturn...

Key words: forms of representation of models, ring, oscillatory phenomena.

Математическая модель — это описание системы с использованием математических понятий и формального языка. Процесс разработки математической модели называется математическим моделированием [1].

Задача (рисунок 1) [2].

4. Построить модель колебаний колец Сатурна, которая описывается следующим уравнением[7]

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma \frac{2\pi R_0 \rho r}{(r^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Предполагается, что бесконечно тонкое кольцо с линейной плотностью ρ и радиуса R_0 располагается в плоскости XOY . Ось OZ проходит через центр кольца, по которой вверх и вниз движется материальная точка (Сатурн) под действием гравитационной силы с гравитационной постоянной γ . В произвольный момент времени точка находится на расстоянии r от центра кольца и на расстоянии R от кольца. Из принципа относительности следует, что можно считать Сатурн неподвижным, а его кольца движущимися.

Рисунок 1 — Условие задачи

Основные этапы решения задачи.

- 1) В основе построения математических моделей лежат фундаментальные законы природы.
- 2) Реальный процесс заменим характеризующими его уравнениями и дополнительными условиями.
- 3) Проведём дискретизацию — континуальные уравнения заменим сеточными аналогами.
- 4) Составим алгоритм и реализуем его в виде программы на языке высокого уровня.
- 5) Выполним вычисления по составленной программе.
- 6) Проанализируем полученные результаты и сравним их с имеющимися экспериментальными данными.

Различают несколько типов моделей:

Инвариантные - запись отношений модели с использованием традиционного математического языка, независимо от метода, используемого для решения уравнений модели;

Аналитические - запись модели в результате аналитического решения исходных уравнений модели;

Алгоритмические - запись взаимосвязей модели и выбранного численного метода решения в виде алгоритма;

Схематические (графические) - представление модели на графическом языке (например, на языке графиков, эквивалентных схем, диаграмм и т. п.);

Физические - представление моделей в виде уменьшенных копий реальных устройств и технологических процессов;

Аналоговые – модели, основанные на подобии явлений, имеющих разную физическую природу, но описываемых одними и теми же математическими уравнениями.

Мы для решения данной задачи воспользуемся и применим *физическую модель*.

Построим модель движения массы Сатурна M_0 в поле гравитационных сил, создаваемых его кольцами радиусом R и линейной плотностью ρ_0 . Кольцо считается бесконечно тонким, движение происходит вдоль оси кольца. Но, поскольку кольца намного больше планеты, Сатурн можно рассматривать как точечную массу (рисунок 2).

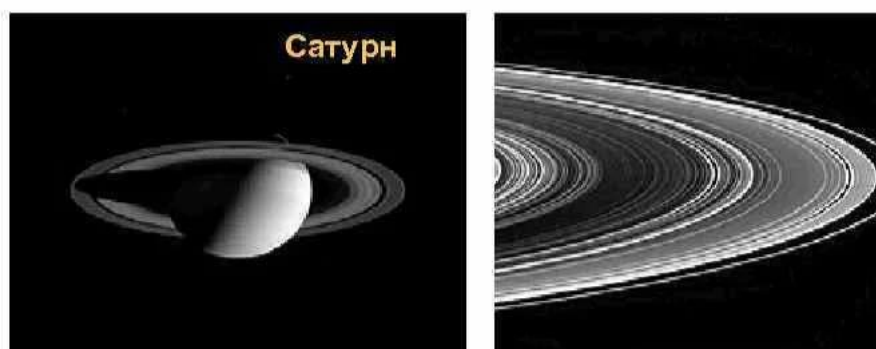


Рисунок 2 —Кольца Сатурна

Предложения: кольцо представляет собой идеальный круг, а масса распределена линейно с плотностью ρ_0 .

Воспользуемся наиболее выгодным расположением: предположим, что кольца не вращаются. Тогда мы свяжем систему отсчёта с кольцами, а не с Сатурном. Мы используем принцип относительности. По этому принципу будем рассматривать силу, с которой кольцо действует на Сатурн (а не Сатурн действует на кольцо).

Сатурн будет двигаться вверх или вниз. При движении вправо/влево из-за симметрии системы гравитация будет отталкивать её обратно к центру. Это означает, что кольцо Сатурна движется вверх и вниз по косинусному графику, но, учитывая принцип относительности, применённый в начале задачи, можно утверждать, что кольца движутся вокруг Сатурна таким образом.

В результате расчёта были получены следующие результаты, которые указаны в описании задачи и в программе Scilab (рисунок 3) [3]:

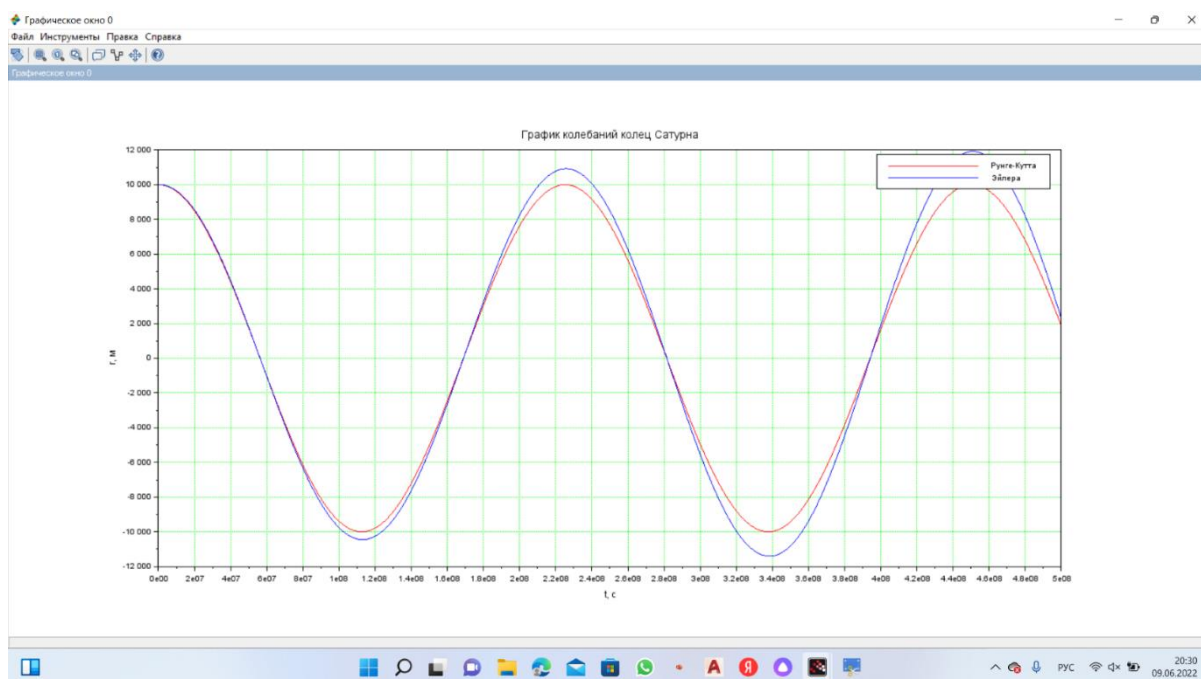


Рисунок 3 — Модель колебаний колец Сатурна

Таким образом, построена математическая модель, которая реализована в виде программы в среде Scilab. Исследование показало, что в принятом приближении колебания являются гармоническими, амплитуда и частота которых определяется массой планеты и силой гравитационного взаимодействия. Данная модель может быть легко уточнена учётом менее значимых факторов. При численной реализации модели оказалось, что метод Эйлера не пригоден для решения задачи, поскольку имеет первый порядок точности, и с течением времени амплитуда колебаний изменяется вследствие накопления погрешностей. Поэтому был использован явный одношаговый

метод Рунге-Кутты 4-го порядка. В этом случае процесс оказался устойчивым относительно численной реализации.

ЛИТЕРАТУРА:

14. Михеев А. А., Островский Ю. К. Математическое моделирование. Ч. 1 М.: МГУДТ 2016 электронное учебное пособие biblio@rguk.ru ISBN 978-5-87055-283-5 (дата обращения: 03.03.2023).

15. Козин Р. Г. Математическое моделирование: примеры решения задач. Учебно-методическое пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2010, 175 с (дата обращения: 05.03.2023).

16. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALT Linux; Бинوم. Лаборатория знаний, 2008. — 260 с (дата обращения: 09.03.2023).