ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РАСШИРЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ LU-РАЗЛОЖЕНИЯ

В. В. Долишний, А. И. Жданов
Самарский государственный аэрокосмический университет, г.Самара

1. Введение

Рассмотрим стандартную задачу регуляризации Тихонова:

$$\Omega(x,\alpha) = \|Ax-b\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

представляющую нахождение регуляризованного решения системы уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $m \geq n$, $\alpha > 0$ параметр регуляризации, $\|\cdot\|$ - евклидова векторная норма.

Известно, что задача о минимизации сглаживающего функционала Тихонова $\Omega(x,\alpha)$ может быть сведена к нормальной системе уравнений (или уравнению Эйлера):

$$\left(A^T A + \alpha E\right)x = A^T b \tag{2}$$

Решение системы (2) называют регуляризованным псевдорешением системы (1).

Рассмотрим три основных способа получения регуляризованного псевдорешения системы (1):

- на основе нормальной системы уравнений (2);
- на основе сингулярного разложения матрицы системы A [1];
- на основе расширенной регуляризованной нормальной системы [2].

В данной работе дан сравнительный анализ этих трёх методов для различных классов задач. Метод, использующий сингулярное разложение, описан, например, в [1]. Для решения системы нормальных уравнений использовано разложение Холесского, так как матрица системы (2) является симметричной положительно определённой при любом $\alpha > 0$. В работе используется расширенная регуляризованная система нормальных уравнений, предложенная в [2], которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \omega E_m & A \\ A^t & -\omega E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где E_m, E_n единичные матрицы, порядка, соответственно, m и n, параметр регуляризации $\omega = \sqrt{\alpha}$.

Достоинством расширенной регуляризованной нормальной системы (3) является то, что

$$\kappa_2\left(\widetilde{A}_\omega\right)=\left(\frac{\delta_{\max}+\omega^2}{\delta_{\min}+\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\kappa_2\left(A^TA+\omega^2E\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\kappa_2(A)$ спектральное число обусловленности матрицы A, $\delta_{\max}(A)$, $\delta_{\min}(A)$ - соответственно, максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A, $\widetilde{A}_\omega$ - матрица системы (3) [2].

Для решения системы (3) используются подходы, на основе трёх матричных разложений: LU, QR (на основе отражений Хаусхолдера) и LDL^T. Последнее представляет собой модификацию разложения Холесского для знаконеопределённых матриц, которая описана в [3].

2. Численный эксперимент

Линейные системы с возмущением в векторе правой части

Первая группа тестов представляет собой решение следующей системы:

$$Ax=b_{true}+\xi,$$

где b_{true} - точное значение правой части, ξ возмущения вектора правой части.

Подразумевается, что при отсутствии погрешности правой части ξ данная система совместная и имеет единственное решение, однако наличие погрешности делает её несовместной. Матрица системы A плохо обусловлена, поэтому для повышения точности нахождения псевдорешения системы требуется регуляризация.

1. Восстановление одномерного сигнала

Матраца A и вектор x получаются путём дискретизации на интервале $-\frac{\pi}{2}\le s,t\le\frac{\pi}{2}$ функций:

$$\alpha(s,t)=(\cos(s)+\cos(t))\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2,$$

$$u=\pi(\sin(s)+\sin(t)),$$

$$x(t) = 2e^{-6(t-0.8)^2} + e^{-2(t-0.5)^2},$$

вектор правой части $b_{true} = Ax$.

Относительная погрешность решений, полученных рассматриваемыми численными алгоритмами, для этой задачи при размерности матрицы A равной 64 и уровне шума 0,05 приведена в табл. 1. Число обусловленности матрицы системы $cond(A) = 1{,}217 \times 10^{19}$.

Таблица 1. Относительная погрешность решений задачи восстановления одномерного сигнала при уровне шума 0.05, размерность матрицы 64

α	Нормальная система	SVD-метод	Нормальная расширенная система, LU	Нормальная расширенная система, QR	Нормальная расширенная система, LDL^T
10	0,9506	0.9506	0,9506	0,9506	0,9506
5	0.8440	0,8440	0,8440	0,8440	0,8440
1	0,3887	0,3887	0.3887	0,3887	0.3887
0.5	0,2471	0,2471	0,2471	0,2471	0,2471
0.1	0,1908	0.1908	0,1908	0,1908	0.1908
0,05	0,2927	0,2927	0,2927	0,2927	0,2927
0.01	0,9904	0,9904	0,9904	0.9904	0,9904
0,005	2,5029	2,5029	2,5029	2.5029	2,5029

2. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода

Матрица A и векторы b_{true} и x получены дискретизацией интегрального уравнения Фредгольма первого рода $b(s) = \int_{-6}^{6} \alpha(s,t)x(t)dt$, где

$$\alpha(s,t) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\dfrac{\pi(s-t)}{3}\right), & |s-t| < 3, \\ 0, & |s-t| \ge 3, \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right), & |t| < 3, \\ 0, & |t| \ge 3, \end{cases}$$

$$b(s) = (6 - |s|)\left(1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi s}{3}\right)\right) + \frac{9}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi|s|}{3}\right).$$

Результаты, полученные для этого тестового примера при размерах матрицы A равной 32 и уровне шума 0,1, представлены в табл. 2. Число обусловленности матрицы системы $cond(A) = 2,6669 \times 10^{3}$.

Таблица 2. Относительная погрешность решений уравнения Фредгольма первого рода при уровне шума 0.1, размерность матрицы 32

α	Нормальная система	SVD-метод	Нормальная расширенная система. LU	Нормальная расширенная система. QR	Нормальная расширенная система. LDL^T
10	0,7985	0,7985	0,7985	0,7985	0.7985
5	0,5371	0,5371	0,5371	0,5371	0.5370
1	0,0837	0,0837	0,0837	0.0837	0.0827
0,5	0,1451	0.1451	0,1451	0,1451	0.1457
0.1	0,7971	0.7971	0.7971	0,7971	0,7699
0,05	1.6539	1.6539	1.6539	1,6539	1,7003
0,01	15,2092	15.2092	15.2092	15,2092	14,7956
0,005	29,9268	29.9268	29,9268	29,9268	29,4448

Системы с плохо обусловленной матрицей

Рассмотрим систему с матрицей Гильберта. Данная система будет совместной и определённой, однако плохая обусловленность матрицы системы не позволяет решить ее напрямую. Относительная погрешность решений, полученной для матрицы Гильберта порядка 32 приведена в табл.3. Число обусловленности матрицы системы $cond(A) = 1,4542 \times 10^{20}$.

Таблица 3. Относительная погрешность решений системы с матрицей Гильберта порядка 32

α	Нормальная система	SVD-метод	Нормальная расширенная система, LU	Нормальная расширенная система, QR	Нормальная расширенная система, LDL^T
10	$9,7658\times10^{-1}$	$9,7658\times10^{-1}$	$9,7658\times10^{-1}$	$9,7658\times10^{-1}$	$9,7658\times10^{-1}$
1	$5,3739\times10^{-1}$	$5,3739\times10^{-1}$	$5,3739\times10^{-1}$	$5,3739\times10^{-1}$	$5,3739\times10^{-1}$
10^{-1}	$1,6232\times10^{-1}$	$1,6232\times10^{-1}$	$1,6232\times10^{-1}$	$1,6232\times10^{-1}$	$1,6232\times10^{-1}$
10^{-3}	$1,4947\times10^{-2}$	$1,4947\times10^{-2}$	$1,4947\times10^{-2}$	$1,4947\times10^{-2}$	$1,4947\times10^{-2}$
10^{-5}	$1,4485\times10^{-3}$	$1,4487\times10^{-3}$	$1,4487\times10^{-3}$	$1,4487\times10^{-3}$	$2,0262\times10^{-1}$
10^{-7}	$3,6381\times10^{-2}$	$1,4105\times10^{-4}$	$1,4105\times10^{-4}$	$1,4105\times10^{-4}$	$1,7678\times10^{-1}$

Таблица 3. Окончание.

10^{-9}	-	$1{,}7387\times10^{-5}$	$1{,}7408\times10^{-5}$	$1{,}7374\times10^{-5}$	$1{,}7678\times10^{-}$
10^{-11}		$4{,}5851\times10^{-6}$	$6{,}9798\times10^{-6}$	$2{,}5407\times10^{-5}$	$1{,}7678\times10^{-}$
10^{-13}	-	$3{,}5864\times10^{-4}$	$6{,}0532\times10^{-4}$	$3{,}0973\times10^{-3}$	$2{,}5000\times10^{-}$
10^{-15}		$7{,}6580\times10^{-3}$	$2{,}8558\times10^{-2}$	$2{,}7948\times10^{-1}$	$2{,}5151\times10^{-}$

Линейные системы с матрицей неполного машинного ранга

Третий класс тестовых задач будет содержать систему, матрица которой имеет неполный машинный ранг [4, с.66].

Рассмотрим следующую несовместную систему линейных уравнений, заданную своей матрицей A и вектором правой части b:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1{,}00000001\\ 1 & 1{,}0000002 & 1\end{pmatrix}\in R^{4\times3},\qquad b=\begin{pmatrix}-94\\ 106\\ 6{,}00000003\\ 6{,}0000004\end{pmatrix}\in R^{4}. \quad (4)$$

Точное псевдорешение такой системы уравнений $\overline{x}=(1,2,3)^T$. Решения, полученные рассматриваемыми численными алгоритмами и их относительные погрешности приведены в табл. 4.

Таблица 4. Решения и их относительная погрешность для задачи неполного машинного ранга (3)

α	Нормальная система	SVD-метод	Нормальная расширенная система, LU	Нормальная расширенная система, QR	Нормальная расширенная система, LDL^T
10^{-1}	$3{,}7797\times10^{-1}$	$3{,}7797\times10^{-1}$	$3{,}7797\times10^{-1}$	$3{,}7797\times10^{-1}$	$3{,}7797\times10^{-1}$
10^{-3}	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$
10^{-5}	$3{,}7795\times10^{-1}$	$3{,}7785\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$	$3{,}7796\times10^{-1}$
10^{-7}	$3{,}0878\times10^{-1}$	$7{,}9533\times10^{-1}$	$3{,}7669\times10^{-1}$	$4{,}0816\times10^{-1}$	$3{,}9187\times10^{-1}$
10^{-9}	-	$3{,}3507\times10^{2}$	$1{,}1194\times10^{-2}$	$1{,}4162\times10^{3}$	$5{,}7586\times10^{-1}$

Таблица 4. Окончание.

10^{-11}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}8793\times10^{-7}$	$1{,}5246\times10^{5}$	$5{,}9669\times10^{-5}$
10^{-13}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}3925\times10^{-10}$	$1{,}1333\times10^{7}$	$7{,}2989\times10^{-7}$
10^{-15}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}3925\times10^{-10}$	$7{,}6146\times10^{7}$	$7{,}2988\times10^{-7}$
10^{-17}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}3925\times10^{-10}$	$4{,}0846\times10^{9}$	$7{,}1634\times10^{-7}$
10^{-19}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}3925\times10^{-10}$	$3{,}8796\times10^{9}$	$9{,}2317\times10^{-9}$
10^{-21}		$3{,}4531\times10^{2}$	$8{,}3925\times10^{-10}$	$3{,}8776\times10^{9}$	$7{,}1634\times10^{-7}$

3. Анализ полученных результатов и основные выводы

Полученные результаты численных экспериментов показывают, что использование регуляризованных расширенных нормальных систем позволяет расширить класс решаемых задач. Так, в примере (4) для задачи с матрицей неполного машинного ранга решение удалось получить только с использованием регуляризованных расширенных нормальных систем.

Для решения расширенных нормальных систем вида (3) наиболее стабильные по точности результаты показал метод, основанный на LU разложении. При этом использовались стандартные подпрограммы из пакета Matlab.

Следует также отметить, что решение систем линейных алгебраических уравнений при помощи LU-разложения является широко используемым и в настоящее время существует большое число стандартных пакетов и подпрограмм, реализующих его, в том числе для векторных и параллельных компьютеров.

Список использованных источников

1. Chung J., Nagy J.G., O'Leary D.P. A weighted-GCV method for Lanczos-hybrid regularization // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2008. Vol. 28. P. 149-167.
2. Жданов А.И. Об одном численно устойчивом алгоритме решения систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16). - С. 149-153.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. - М.: Мир, 1999. - 548 с.
4. Жданов А.И. Введение в методы решения некорректных задач: учеб. пособие. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. 87 с.