Прикладной анализ случайных процессов/ Под ред. Прохорова С.А. - СНЦ РАН, 2007. - 582 с., ил.

Fitch E.C. Fluid Contanination Control // Technology transfer Series #4, Oklahoma, FFS, INC. 1988. - 433p.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ С УЧЕТОМ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

С.А. Матюнин, В.Д. Паранин

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Электрооптические кристаллы (ЭОК) применяются для создания электрооптических элементов и устройств различного назначения: быстродействующих амплитудных и фазовых модуляторов оптического излучения, дефлекторов, коммутаторов, перестраиваемых спектральных фильтров, в планарном и объемном исполнениях.

При проектировании оптических элементов на основе ЭОК в большинстве случаев используются простые одномерные распределения управляющего электрического поля, имеющего практически на 100% продольный или поперечный характер по отношению к направлению распространения оптического излучения, выбираются частные случаи сочетания ориентации оптических осей ЭОК, положения волнового вектора световой волны, направления действия электрического поля. Подобная практика снижает трудоемкость проектирования, сложность математических расчетов, однако не позволяет создать элементы и устройства с оптимальными рабочими параметрами.

Целью настоящей работы является создание обобщенной математической методики расчета показателя преломления для произвольных направлений распространения световой волны, состояния поляризации и ориентации оптических осей ЭОК в трехмерном управляющем электрическом поле.

Для описания пространственных электрических полей и оптических осей кристалла введем понятия системы координат кристалла (СКК) и системы координат электрического поля (СКЭП).

Координатной системой СКК служит ортонормированный базис векторов $x_2y_2z_2$, параллельных оптическим осям ЭОК, причем вектор z_2 является совпадающим с осью оптической анизотропии.

Система СКЭП является фиксированной системой координат с ортогональными направляющими $x_1y_1z_1$, в которой задаются величины и направления внешних электрических полей, геометрия и ориентация управляющих электродов, направление распространения световой волны, т.е.

в СКЭП задается большинство исходных данных задачи. В общем случае оси $x_2y_2z_2$ СКК могут быть как параллельными координатным осям $x_1y_1z_1$ СКЭП, так и ориентированными под произвольными углами. Введение дополнительной координатной системы СКЭП позволяет задать пространственное электрическое поле, связанное с реальными координатами, проводить расчет параметров светового пучка, например фазовых портретов при эволюции волнового вектора в пространстве, определять положение оси пропускания поляризатора относительно управляемого элемента.

Условиями поставленной задачи расчета являются: направление распространения k_1 и состояние поляризации p_1 оптического излучения, ориентация осей и матрица электрооптических коэффициентов r_{ij} ЭОК, направления и величины действующих электрических полей в СКЭП.

Для решения данной задачи предлагается воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Задание взаимосвязи координатных систем СКК и СКЭП через матрицы прямого и обратного линейных преобразований.

2. Задание векторов E_{x1}, E_{y1}, E_{z1} напряженности неоднородного электрического поля в СКЭП и определение их эффективных проекций на оси СКК – вектора E_{x2}, E_{y2}, E_{z2}.

3. Определение уравнения эллипсоида показателей преломления с учетом действующих значений поля (векторов E_{x2}, E_{y2}, E_{z2}) и матрицы электрооптических коэффициентов r_{ij}.

4. Задание направления распространения световой волны в СКЭП в виде волнового вектора k_1 и определение его координат в СКК – вектор k_2.

5. Определение уравнения плоскости S_2, перпендикулярной вектору k_2 и проходящей через центр координат СКК (эллипсоид показателей преломления).

6. Задание вектора поляризации p_1 световой волны в СКЭП и определение его координат в СКК – вектор p_2.

7. Определение уравнения плоскости S_{p2s2}, проецирующей вектор p_2 на плоскость S_2.

8. Определение координат точек пересечения плоскостей S_2, S_{p2s2} и эллипсоида показателей преломления – точки $(x_{2s2}, y_{2s2}, z_{2s2})$, $(-x_{2s2}, -y_{2s2}, -z_{2s2})$ и определение показателя преломления для световой волны с заданными параметрами как модуля вектора, соединяющего центр координат СКК и любую из указанных точек $(x_{2s2}, y_{2s2}, z_{2s2})$, $(-x_{2s2}, -y_{2s2}, -z_{2s2})$.

Необходимо отметить, что в общем случае вектор поляризации p световой волны должен задаваться в трехмерном пространстве СКЭП, причем p_2 ортогонален k_2 и проходит через центр координат. Однако попытка определения координат p_2 только по указанным условиям приводит к уравнению семейства векторов, принадлежащих плоскости, проходящей через центр координат и ортогональной вектору k_2. В этом случае однозначное положение необходимого p_2 из данного семейства векторов в исходных координатных осях x_1, y_1, z_1 может быть определено только при условии ввода дополнительной связи между p_2 и осями СКЭП, что усложняет решение задачи.

Поэтому, для задания вектора поляризации предлагается иной подход, основанный на определении координат вектора p_2 в трехмерном пространстве СКК как проекции двумерного вектора поляризации p_1, принадлежащего входной плоскости оптического элемента, на плоскость S_2, ортогональную k_2 и проходящую через центр координат СКК (эллипсоида показателей преломления). Тогда ориентация вектора p_2 относительно осей x_1, y_1, z_1 будет известна, поскольку задается в условии задачи.

Методика расчета показателя преломления в электрооптических элементах поясняется рис.1, на котором изображены координатные системы СКЭП и СКК, вектора p_1, p_2, p_{S2}, k_1, k_2, плоскость S_2, эллипсоид показателей преломления, угол α ориентации вектора p_1 в плоскости x_1z_1.

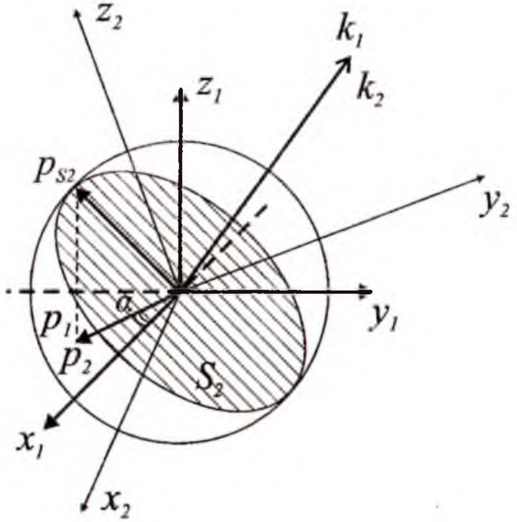

Рис. 1. Пояснение алгоритма решения

Для задания связи координатных систем СКК и СКЭП воспользуемся нормированными матрицами прямого и обратного линейных ортогональных преобразований A, A^{-1} [1]:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \qquad 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \qquad 2$$

Из (1) следует, что элементы a_{ij} матрицы A являют направляющими косинусами осей x_1, y_1, z_1 относительно x_2, y_2, z_2.

Задание управляющего электрического поля в СКЭП производит посредством векторов напряженности $E_{x1}(x_1,y_1,z_1)$, $E_{y1}(x_1,y_1,z_1)$, $E_{z1}(x_1,y_1,z_1)$ описывающих распределение поля в трехмерном пространстве. Проекци E_{x2}, E_{y2}, E_{z2} найдем, учитывая направления векторов напряженност электрического поля E_{x1}, E_{y1}, E_{z1} при сложении с учетом выражения (1):

$$\begin{aligned} E_{x2} &= (E_{x1}\cdot x_1)a_{11} + (E_{y1}\cdot y_1)a_{12} + (E_{z1}\cdot z_1)a_{13}; \\ E_{y2} &= (E_{x1}\cdot x_1)a_{21} + (E_{y1}\cdot y_1)a_{22} + (E_{z1}\cdot z_1)a_{23}; \qquad 3 \\ E_{z2} &= (E_{x1}\cdot x_1)a_{31} + (E_{y1}\cdot y_1)a_{32} + (E_{z1}\cdot z_1)a_{33}, \end{aligned}$$

где $(E_{x1}\cdot x_1)$, $(E_{y1}\cdot y_1)$ и т.п. – скалярные произведения векторов поля E_{x1}, E_{y1} на соответствующие единичные орты x_1, y_1. В результате получим напряженности электрического поля, действующие вдоль оптических осей ЭОК, с учетом как сонаправленности векторов E_{x1} и x_1, E_{y1} и y_1, E_{z1} и z_1, так и координат базиса СКК в СКЭП.

Уравнение эллипсоида показателей преломления ЭОК в системе координат кристалла запишем с помощью определенных в (3) составляющи полей E_{x2}, E_{y2}, E_{z2} и матрицы электрооптических коэффициентов r_{ij}:

$$\left(\frac{1}{n_{x2}^2} + \sum_{k=1}^{3} r_{1k}E_{k2}\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_{y2}^2} + \sum_{k=1}^{3} r_{2k}E_{k2}\right)y_2^2 + \left(\frac{1}{n_{z2}^2} + \sum_{k=1}^{3} r_{3k}E_{k2}\right)z_2^2 +$$

$$+2y_2z_2\sum_{k=1}^{3} r_{4k}E_{k2} + 2x_2z_2\sum_{k=1}^{3} r_{5k}E_{k2} + 2y_2x_2\sum_{k=1}^{3} r_{6k}E_{k2} = 1, \quad (4)$$

где k – 1, 2, 3 соответствует обозначениям x, y, z, для одноосных кристаллов $n_{x2}=n_{y2}=n_o$, $n_{z2}=n_e$. Частный вид (4) будет зависеть от класса симметрии выбранного ЭОК и наличия ненулевых составляющих E_{x2}, E_{y2}, E_{z2}.

Направление распространения световой волны в СКЭП зададим в виде волнового вектора $k_1(k_{1x1}, k_{1y1}, k_{1z1})$, где k_{1x1}, k_{1y1}, k_{1z1} – проекции k_1 на оси координат x_1,y_1,z_1. Координаты волнового вектора $k_2(k_{2x2}, k_{2y2}, k_{2z2})$, в базисе СКК при наличии матрицы перехода (1) будут равны:

$$
\begin{aligned}
k_{2x2} &= k_{1x1}a_{11} + k_{1y1}a_{12} + k_{1z1}a_{13};\\
k_{2y2} &= k_{1x1}a_{21} + k_{1y1}a_{22} + k_{1z1}a_{23};\\
k_{2z2} &= k_{1x1}a_{31} + k_{1y1}a_{32} + k_{1z1}a_{33}.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Для нахождения уравнения плоскости S_2, перпендикулярной направлению распространения световой волны, воспользуемся условием ортогональности S_2 и k_2, а также принадлежности центра координат (0;0;0) к S_2:

$$
k_{2x2}x_2 + k_{2y2}y_2 + k_{2y2}y_2 = 0, \qquad (6)
$$

где составляющие k_{2x2}, k_{2y2}, k_{2z2} определены в (5).

Для задания вектора поляризации p_1 световой волны в СКЭП определим сначала прямую y_1, содержащую вектор поляризации световой волны v_1, ориентированную под углом α к положительному направлению оси x_1 и проходящую через центр координат:

$$
y_1 = x_1 tg(\alpha).
$$

Тогда вектор поляризации p_1 будет иметь вид:

$$
\vec{p}_1 = \vec{x}_1 \cos(\alpha) + \vec{y}_1 \sin(\alpha).
$$

Координаты вектора p_1 в системе СКК определим через матрицу преобразования A^{-1}:

$$
\vec{p}_2 = p_{2x2}\vec{x}_2 + p_{2y2}\vec{y}_2 + p_{2z2}\vec{z}_2,
$$

где

$$
\begin{aligned}
p_{2x2} &= a_{11}\cos(\alpha) + a_{12}\sin(\alpha);\\
p_{2y2} &= a_{21}\cos(\alpha) + a_{22}\sin(\alpha);\\
p_{2z2} &= a_{31}\cos(\alpha) + a_{32}\sin(\alpha).
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Известно, что каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной вектору $m=m_x i+m_y j+m_z k$, является выражение [2]:

$$\frac{x-x_0}{m_x}=\frac{y-y_0}{m_y}=\frac{z-z_0}{m_z}.$$

Поскольку $x_0=y_0=z_0=0$, и $m_x=p_{2x2}$, $m_y=p_{2y2}$, $m_z=p_{2z2}$, то уравнение прямой y_2 примет вид:

$$\frac{x_2}{p_{2x2}}=\frac{y_2}{p_{2y2}}=\frac{z_2}{p_{2z2}},$$

где составляющие p_{2x2}, p_{2y2}, p_{2z2} определены в (7).

С целью получения уравнения плоскости S_{p2s2}, проецирующей y_2 на плоскость S_2, запишем уравнение прямой y_2 в виде пересечения двух плоскостей, например плоскостей, проецирующих y_2 на координатные плоскости x_2y_2 и x_2z_2:

$$x_2 p_{2y2} - y_2 p_{2x2} = 0;$$
$$x_2 p_{2z2} - z_2 p_{2x2} = 0.$$

Тогда уравнение семейства плоскостей, проходящих через данну прямую, запишется в виде:

$$x_2 p_{2y2} - y_2 p_{2x2} + \lambda\left(x_2 p_{2z2} - z_2 p_{2x2}\right) = 0$$

или после операции группировки:

$$x_2\left(p_{2y2} + \lambda p_{2z2}\right) - y_2 p_{2x2} - z_2 \lambda p_{2x2} = 0.$$

Для нахождения параметра λ и уравнения плоскости S_p воспользуемся условием перпендикулярности плоскостей S_{p2s2} и S_2:

$$k_{2x2} p_{2y2} + k_{2x2}\lambda p_{2z2} - k_{2y2} p_{2x2} - k_{2z2}\lambda p_{2x2} = 0. \qquad (8)$$

Используя (8) определим значение параметра λ и уравнение плоскос S_{p2s2}.

$$\lambda = \frac{k_{2y2}p_{2x2} - k_{2x2}p_{2y2}}{k_{2x2}p_{2z2} - k_{2z2}p_{2x2}};$$

$$x_2\left(p_{2y2} + \frac{p_{2z2}\left(k_{2y2}p_{2x2} - k_{2x2}p_{2y2}\right)}{k_{2x2}p_{2z2} - k_{2z2}p_{2x2}}\right) - y_2 p_{2x2} - z_2\frac{p_{2x2}\left(k_{2y2}p_{2x2} - k_{2x2}p_{2y2}\right)}{k_{2x2}p_{2z2} - k_{2z2}p_{2x2}} = 0. \quad (9)$$

Для расчета показателя преломления n_{p2} ЭОК для световой волны с заданными параметрами (состояние поляризации, направление распространения) необходимо воспользоваться зависимостью, определяющей величину n_{p2} как полуось эллипсоида показателей преломления, параллельную вектору поляризации p_2:

$$n_{p2} = \sqrt{x_{2s2}^2 + y_{2s2}^2 + z_{2s2}^2},$$

где $(x_{2s2}, y_{2s2}, z_{2s2})$, $(-x_{2s2}, -y_{2s2}, -z_{2s2})$ – точки пересечения плоскостей S_2, S_{p2s2} и эллипсоида показателей преломления, определяемые из решения соответствующей системы уравнений (4), (6), (9):

$$x_{2s2} = \pm\frac{k_{2z2}b_2 - b_3k_{2y2}}{\sqrt{B+C+D+E+F+G+H}};$$

$$y_{2s2} = \pm\frac{\left(b_3k_{2x2} - k_{2z2}b_1\right)\left(k_{2z2}b_2 - b_3k_{2y2}\right)}{\left(k_{2z2}b_2 - b_3k_{2y2}\right)\sqrt{B+C+D+E+F+G+H}};$$

$$z_{2s2} = \pm\frac{\left(b_1k_{2y2} - k_{2x2}b_2\right)\left(k_{2z2}b_2 - b_3k_{2y2}\right)}{\left(k_{2z2}b_2 - b_3k_{2y2}\right)\sqrt{B+C+D+E+F+G+H}},$$

где условные обозначения B, C, D, E, F, G, H равны:

$$B = b_1b_3k_{2x2}k_{2y2}d_3 - 2b_1b_3k_{2x2}k_{2z2}c_2 + b_3^2k_{2x2}^2c_2;$$

$$C = -b_2b_3k_1^2d_3 + b_3^2c_1k_{2y2}^2 + b_3b_2k_{2x2}k_{2z2}d_1;$$

$$D = -2b_2b_3k_{2y2}k_{2z2}c_1 + c_1k_{2z2}^2b_2^2 - b_1b_3d_2k_{2y2}^2;$$

$$E = b_1b_2k_{2y2}k_{2z2}d_2 + b_1^2k_{2y2}^2c_3 - k_{2x2}k_{2y2}b_3^2d_1;$$

$$F = -2k_{2x2}k_{2y2}b_1b_2c_3 + k_{2x2}k_{2y2}b_2b_3d_2 - k_{2x2}k_{2z2}b_2^2d_2;$$

$$G = k_{2x2}^2 b_2^2 c_3 - k_{2y2} k_{2z2} b_1^2 d_3 + k_{2y2} k_{2z2} b_1 b_3 d_1;$$

$$H = -b_1 b_2 k_{2z2}^2 d_1 + k_{2x2} k_{2z2} b_1 b_2 d_3 + k_{2z2}^2 b_1^2 c_2.$$

Величины c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 являются сокращенными обозначени множителей при x_2^2, y_2^2, z_2^2, x_2y_2, x_2z_2, y_2z_2 уравнения (4), b_1, b_2, b коэффициенты при x_2, y_2, z_2 в выражении (9).

Выводы. Таким образом, в настоящей работе предложена метод расчета показателя преломления электрооптического кристалла для свето волны с заданным направлением распространения и состоянием поляриза при произвольной ориентации оптических осей кристалла относител векторов напряженности управляющего электрического поля. На основа теоретического аппарата линейной алгебры, аналитической геометрии теории электрооптического эффекта реализовано обобщен математическое описание предложенного алгоритма и получе аналитические зависимости, связывающие искомый показатель преломле с условиями задачи.

Адекватность предложенного алгоритма расчета была подтвержд сравнением результатов моделирования с известными решениями части задач электрооптики.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерс образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научно потенциала высшей школы 2009-2010», проект № 10в-Б001-053.

Список использованных источников

1. Данко, П. Е., Попов, А.Г. Кожевникова, Т.Я. Высшая математика упражнениях и задачах [Текст] / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. - М ОНИКС 21 век, 2003. 304с.

2. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Аналитическая геометрия: учебн. для вуз [Текст] / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. – М.: Наука. Физматлит, 1999. 224 с.