Математическая модель развития микрополиса

А.И. Швидак, Ю.Л. Ратис, А.А. Нечитайло

1.ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена концепция микрополиса и мидиэкономики, основанная на принципах обратной связи в экономике. Для описания экономики микрополиса в рамках работы [1] была использована обобщенная модель Гудвина - Калецкого. Однако, эта модель не дает исчерпывающего описания мидиэкономических объектов по целому ряду причин. Во - первых, модель Гудвина - Калецкого, будучи чисто экономической, не содержит социометрических параметров. Во - вторых, будучи линейной, она изначально описывает только переходные и колебательные процессы в линейных системах.

В связи с этим возникает проблема учета нелинейных эффектов в квазизамкнутых социо - экономических системах, к каковым относится микрополис.

Целью настоящей работы является синтез нелинейной социо - экономической модели микрополиса.

2. СИНТЕЗ МОДЕЛИ

Нелинейные модели развития человечества в основных чертах близки к агрегированным моделям типа "хищник - жертва". Поскольку нас интересует сценарий развития микрополиса "в целом", то логично принять за основу предложенную в 1990 г. Ю.И. Неймарком простейшая математическую модель, позволяющую объяснить основные закономерности экономического развития человеческого общества [2,3]. Эта модель описывает взаимодействие двух категорий людей, участвующих в производстве, - производителей (x) и управленцев (y) - с произведенным и накопленным ими продуктом (z). Уравнения модели в соответствующих единицах измерения можно записать в виде:

$$\dot{x} = (1 - x - y + z) \tag{1}$$

$$\dot{y} = (-b - cy + az)y \tag{2}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} 2F & \text{при } z > o \\ F(1 + \mathrm{sign}F) & \text{при } z = o \end{cases} \tag{3}$$

где $2F = g\varphi(y)\frac{x}{1+\beta \cdot z} - ex - fy$ - функция, описывающая производство и потребление продукта, а $\varphi(y) = \frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}$.

Параметр g в функции F характеризует уровень технологии общества, а функция $\varphi(y)$, изменяющаяся в пределах от 1 до $\varepsilon_1 / \varepsilon_2$, отражает зависимость производства продукта от числа управленцев. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то увеличение y приводит к росту производства, в противном случае, наоборот. Параметр β характеризует тот факт, что производство продукта затрудняется при увеличении количества самого продукта, в частности, из-за ограниченности сырья. Члены $-e \cdot x$ и $-f \cdot y$ в функции F описывают потребление продукта, а член $(1 + z)x$ характеризует прирост числа производителей x за счет уменьшения других категорий населения. Члены $-x^2$ и $-yx$ характеризуют, соответственно, уменьшение количества производителей за счет конкуренции между ними и перехода в управленцы. Член $(az - b)y$ в уравнении (2) описывает изменение числа управленцев y в зависимости от количества продуктов: если продукта много, то число управленцев растет, если мало - уменьшается. Член $-cy^2$ характеризует уменьшение числа управленцев за счет конкуренции между ними.

В работах [4,5] показано, что модель (1) - (3) обладает следующими недостатками: в уравнении (2) не учтен член, характеризующий переход производителей в управленцы, соответствующий члену $-yx$ в уравнении (1). Этот член можно записать в виде dxy. Далее, в уравнении (3) члены, описывающие потребление продукта, не зависят от количества продукта z. Очевидно, что такая зависимость существует. В уравнении (3) также не учтено потребление продукта другими категориями населения. Учет всех этих эффектов осуществлен в работе [5], согласно которой:

$$\dot{x} = (1 - x - y + z) \tag{4}$$

$$\dot{y} = (-b + dx - cy + az)y \tag{5}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} 2F & \text{при } z > o \\ F(1 + \mathrm{sign}F) & \text{при } z = o \end{cases} \tag{6}$$

где $2F = g\varphi(y)\frac{x}{1+\beta \cdot z} - (ex + fy + \gamma)\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z}$

В этой модели потребление продукта должно расти с ростом количества продукта, что будет происходить, если $\delta_1 > \delta_2$.

Система уравнений (4)-(6) содержит в себе как составную часть уравнения модели "хищник - жертва" [5], причем роль хищника играют "управленцы", а роль жертвы - "производители". Однако, в (4)-(6) управленцы "поедают" производителей не только непосредственно, но и через производимый ими продукт [5].

Микрополис, как локальное образование, отличается от "планеты в целом" тем, что он погружен в мировую экономику, как во внешнюю среду, и соответствующая математическая модель должна учитывать возможности обмена с этой средой. Указанный обмен осуществляется за счет экономических факторов (рыба ищет, где глубже, а человек - где лучше).

Таким образом, в рамках микрополиса "производители, управленцы и продукт" (модель Неймарка) взаимодействуют с различными экономическими процессами. В рамках настоящей работы нас интересует только "микрополис в целом". Поэтому мы абстрагируемся от взаимовлияния различных отраслей производства, расположенных на его территории.

Согласно модели Гудвина - Калецкого [1, 7-11]:

$$\begin{cases} Z = C + I + A \\ B = \alpha \cdot (1 - c') \cdot Y - k \cdot K \\ C = c' \cdot Y \\ I = \dfrac{1}{\theta} \displaystyle\int_{t-\theta}^{t} B(t)dt \\ \dfrac{dK}{dt} = B(t - \theta) \\ Y = \dfrac{Z\lambda}{D + \lambda} \end{cases} \qquad (7)$$

где Z - спрос, C - потребительские расходы, I - инвестиционные расходы, A - независимые расходы. Y - продукция, K - величина основного капитала, B - объем решений о капиталовложениях, θ- время запаздывания (отставания инвестиционных расходов от решения о капиталовложениях, $(1/\lambda)$ - время запаздывания предложения от спроса, а - $D = \frac{d}{dt}$ - дифференциальный оператор. Последнее уравнение в системе (7) описывает отставание количества произведенного продукта от величины спроса в духе модели Филлипса [6]. Входящие в систему уравнений (7) константы α, c', k, θ и λ являются параметрами, подлежащими нахождению в процессе идентификации обсуждаемой модели.

Преобразуем систему (7) к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = \lambda \cdot \left(I(t) + A(t) - (1-c')Y(t)\right) \\ \dfrac{dK(t+\theta)}{dt} = \alpha \cdot (1-c') \cdot Y - k \cdot K \\ I(t) = \dfrac{1}{\theta}[K(t+\theta) - K(t)] \,. \end{cases} \tag{8}$$

Параметр z в уравнении (6) и функция $Y(t)$ в системе (7) имеют одинаковый смысл. Это позволяет объединить модели Неймарка и Гудвина - Калецкого. Осуществим синтез новой модели следующим способом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (1 - x - y + z) \\ \dfrac{dy}{dt} = (-b + dx - cy + az)y \\ \dfrac{dz}{dt} = \begin{cases} 2F & \text{при } z > 0 \\ F(1 + \operatorname{sign} F) & \text{при } z = 0 \end{cases} \\ \dfrac{dK(t+\theta)}{dt} = \alpha \cdot (1-c') \cdot \dot{z} - k \cdot K \\ I(t) = \dfrac{1}{\theta}[K(t+\theta) - K(t)] \,, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} 2F = g(I)\varphi(y)\dfrac{x}{1+\beta \cdot z} - (ex + fy + \gamma)\dfrac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} + G(I,A) \\ G(I,A) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot (1-c')t)\displaystyle\int_0^t dt' \cdot \exp\left(\lambda \cdot (1-c')t'\right) \cdot \left(I(t') + A(t')\right) \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что инвестиционно - расходный функционал $G(I,A)$ допускает простую локальную оценку в приближении "экономического склероза":

$$G(I,A) \approx \frac{1 - \exp(-\lambda \cdot (1-c')t)}{(1-c')} \left[I(t) + A(t)\right] \,. \tag{11}$$

Легко показать, что система уравнений (9) удовлетворяет принципу соответствия. Если в синтезированной модели Неймарка - Гудвина - Калецкого положить $a = b = c = d = e = f = g = \delta_2 = 0$, затем сделать предельный переход $\gamma \to 0$ и не обращать внимания на выпадающее из рассмотрения уравнение

$x-(1-x-y_0+z)$, в котором начальное количество управленцев y_0 не меняется с течением времени, а продукция z является независящей от числа производителей x величиной, то система (9) переходит в хорошо изученную модель Гудвина - Калецкого (8). С другой стороны, при $\alpha = k = \lambda = 0$ система уравнений (9) превращается в модель Неймарка - Ланды (4)-(6).

Учет технологического прогресса в системе (9) осуществляется путем введения нелинейной зависимости коэффициента g от величины инвестиций I(t). Поэтому в процессе проверки системы (9) на принцип соответствия мы попутно показали, что без учета социальных факторов модель Гудвина - Калецкого соответствует "пещерному" уровню развития общества (g=0). С другой стороны, вне экономики модель Неймарка отвечает "замороженному" обществу ($g = const$), в котором меняется лишь число едоков, но без инвестиций в науку и технологии научно - технический прогресс отсутствует, как таковой.

В работе [5] было показано, что низкому уровню технологии соответствуют малые значения параметра g. Продукт при этом отсутствует. С ростом g общество достигает технологии $g = g_{кр}$, соответствующей такому уровню его благосостояния, при котором накопленный продукт имеется, но его еще недостаточно, чтобы "прокормить" управленцев. Наконец, при достаточно больших значениях уровня технологии g существует весьма интересная группа особых точек системы (7). В отличие от других, особые точки этой группы могут быть неустойчивы как апериодически, так и колебательно. Согласно [5] имеется некоторое критическое значение $c_{кр}$ параметра конкуренции c, имеющее положительную величину, начиная с некоторого значения параметра g. При увеличении g величина $c_{кр}$ вначале быстро растет до значения $c_{кр}^{(max)}$, а затем начинает очень медленно уменьшаться, стремясь к предельному значению $c_{кр}^{(\infty)}$ при $g \to \infty$. Скорость уменьшения $c_{кр}$ тем больше, а предельное значение $c_{кр}^{(\infty)}$ тем меньше, чем меньше параметр a, характеризующий скорость роста числа управленцев в зависимости от количества накопленного продукта, и чем больше отношение $\varepsilon_1 / \varepsilon_2$, характеризующее влияние управленцев на производство. Особые точки рассматриваемой группы соответствуют развитому обществу со сравнительно высоким уровнем технологии. Возникновение колебательной неустойчивости означает возможность рождения вокруг соответствующей особой точки устойчивого предельного цикла или хаотического аттрактора, что может имитировать кризисные явления в обществе, то - есть, чередующиеся подъемы и спады экономического развития.

При постоянном c, заключенном в интервале $[c_{кр}^{(\infty)}, c_{кр}^{(max)}]$, колебательная неустойчивость имеет место лишь в ограниченном диапазоне изменения параметра g, т. е. в этом случае при достаточно большом уровне технологии кризисы должны перестать потрясать общество. Если же $c < c_{кр}^{(\infty)}$, то кризисные явления не исчезают даже при $g \to \infty$.

В работе [5] изучено поведение координат особых точек последней группы при стремлении уровня технологии g к бесконечности. Их поведение существенно зависит от соотношения между параметрами c и a. Если $c < a$, т. е. конкуренция управленцев мала, а "едят" они много, то при $g \to \infty$ количество продукта и число управленцев стремится к конечным значениям, тогда как количество производителей x стремится к нулю. Такой путь развития общества, безусловно, является тупиковым. Если же $c > a$, то при увеличении уровня технологии g количества продукта, как и числа производителей и управленцев, неограниченно увеличивается тем быстрее, чем больше отношение $\varepsilon_1 / \varepsilon_2$ и меньше отношение δ_1 / δ_2. Тогда при достаточно больших значениях g x, y и z увеличиваются пропорционально g. Очевидно, что такой путь развития общества является прогрессивным.

Суммируя результаты анализа работы [5] и используя принцип соответствия, постулируем, что зависимость $g(I)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. Функция $g(0) = 0$, т. е. при отсутствии инвестиций (и капитала) нет технологического обеспечения производственного процесса;
2. При малых значениях инвестиций зависимость $g(I)$ является линейной;
3. На заданном этапе развития микрополиса функция $g(I)$ достигает максимального значения g_{max} (определяемого технологическими возможностями человечества в целом) при инвестициях $I \geq I_1$.
4. На некотором отрезке $I \in [I_0, I_1]$ функция $g(I)$ растет быстрее, чем линейная.
5. Характерные значения инвестиций I_0, I_1, а также асимптотическое поведение $g(I)$ $(g \xrightarrow[I \to I_1]{} g_{max})$ должны уточняться в рамках специального исследования.

6. Очевидно, что модель должна уточняться по мере развития человеческой цивилизации, так как очередные научные и технологические открытия скачком меняют значение g_{max}.

В качестве примера функций, в той или иной степени удовлетворяющих перечисленным условиям приведем две: $g(I) = \dfrac{\mu_1 I + \mu_2 I^2}{\nu_1 + \nu_2 I + \nu_3 I^2}$ (Паде - аппроксимант); $g(I) = \dfrac{\mu_1 I}{\nu_1 + \nu_2 I} \cdot \dfrac{\exp(\eta(I - I_1))}{1 + \exp(\eta(I - I_1))}$ (гибридная аппроксимация). Они пригодны для описания динамики микрополиса в промежутках между технологическими революциями (скачкообразное изменение g_{max}).

Наконец, переход от системы уравнений (4) - (6) к системе уравнений (9) позволяет учесть еще один крайне важный эффект, отсутствующий в модели Неймарка. Предпоследнее уравнение в системе (9) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом. С точки зрения теории дифференциальных уравнений для нахождения его единственного решения необходимо задать начальные условия (функцию $K(t) = K_0(t)$) на отрезке $t \in [0, \theta]$. То - есть, в отличие от модели Неймарка, синтетическая социо - экономическая модель Неймарка - Гудвина - Калецкого позволяет установить связь между динамикой микрополиса и его "инвестиционной историей".

В свете этого представляется очевидным, что варьируя в рамках модели (9) сценарий инвестиций в микрополис, можно максимально использовать возможности, предоставляемые современными технологиями для вывода отдельных территорий из кризисного состояния и достижения высоких темпов социально - экономического развития.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем вышесказанное следующим образом:

1. Осуществлен синтез моделей Неймарка и Гудвина - Калецкого.
2. Показано, что новая модель удовлетворяет принципу соответствия.
3. Продемонстрировано, что банковские инвестиции в микрополис эффективны в определенном диапазоне. Если они меньше некоторого критического значения, то они не дают весомой отдачи (кредит либо невозвратен, либо гасится с огромным трудом). Если инвестиции больше некоторого значения, то они также малоэффективны. Микрополис не в состоянии их освоить. Этот

двойной пороговый эффект является чисто нелинейным и получается в результате синтеза моделей Неймарка и Гудвина - Калецкого.

4. Показано, что в отличие от классической модели Неймарка новая модель позволяет исследовать связь между развитием локальных экономик и их инвестиционной историей.
5. Интересно продолжить исследование модели (9) с точки зрения синергетики [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Швидак, Ю.Л. Ратис. Инвестиционная политика банка в условиях нестабильной экономики. Концепция микрополиса и малой финансово - промышленной группы. Направлена в печать.
2. Неймарк Ю.И. Математическая модель производители - продукт - управленцы . Динамика систем (динамика, стохастичность, бифуркации). Горький, изд-во ГГУ. 1990, с.84-89.
3. Неймарк Ю.И Простые математические модели . Природа, 1991, №11, с.9 -18.
4. Климов В.И., Ланда П.С "Простейшая модель экономического развития общества", Прикладная Нелинейная Динамика, 1993, т.1, №3-4, с.36-44.
5. Ланда П.С., Нелинейные колебания и волны, М., Наука, 1997, 495 с.
6. Phillips A.W., Stabilisation Policy in Closed Economy., Economic Journal, 1954, 1 №64, p.290-323.
7. Kalecki M. Theory of Economic Dynamics., Allen and Unwin, 1954.
8. Goodwin R.M. The non-linear accelerator and the Persistence of Business Cycles. Econometrica.1951, №19, p1-17.
9. Ратис Ю.Л., Столяр В.В. Математическая модель функционирования энергетической системы города. «Рыночная экономика», Сб. трудов отделения экономики РАН, Самара, 1998.
10. Климов В.М., Ратис Ю.Л., Столяр В.В., Обобщенная модель Калецкого для описания экономики больших городов. Сб. «Управление организационно - техническими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений», ИПУ РАН- СГАУ, Москва- Самара, 1997.
11. Аллен Р. Математическая экономия. ИИЛ. М., 1963, 667 с.
12. Г. Хакен. Синергетика. -М.: Мир, 1980, 404 с.