

12. G.B. Whitham. On propagation of weak shock waves
J. Fluid Mech. v. 1, N3, 1956.

13. Цянь Сюэ-сень. Метод Цуанкаре-Лайтхилла-Го. Сб. Проблемы механики, вып. П.И.Л., 1959.

В.И. КОРОБКО, В.К. МАШМИН

РАЗВИТИЕ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Струйные течения, развивающиеся на криволинейных поверхностях, характеризуются перепадам давления поперек области течения и вдоль нее. Например, струя, развивающаяся на поверхности цилиндра, прилипает к поверхности на значительной ее протяженности (эффект Коанда). Это обстоятельство используется в пневмостике и авиационной технике.

Из множества работ, посвященных исследованию развития турбулентных струй на криволинейных поверхностях, следует отметить работы Невмана [1], Н. Накагухи [2], и Ж. Фекета [3], которые изучили развитие струи на поверхности цилиндра и получили различные эмпирические соотношения, описывающие изменения аэродинамических характеристик струй.

В настоящей работе рассмотрена задача развития плоской турбулентной струи на поверхности цилиндра на основе обобщенных уравнений турбулентного пограничного слоя и результатов экспериментальных исследований. При решении задачи выбрана трехслойная схема развития пограничного слоя, т.е. вся область течения делится на три я: I - ламинарный подслой [$E_T = const$], II - пристенный турбулентный слой [$E_T \sim 4Um$], III - свободный турбулентный слой [$E_T \sim XUm$]).

Постановка задачи

Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в осевом турбулентном пограничном слое, развивающейся на цилиндрической поверхности, в цилиндрической системе координат, имеют вид (рис. 1).

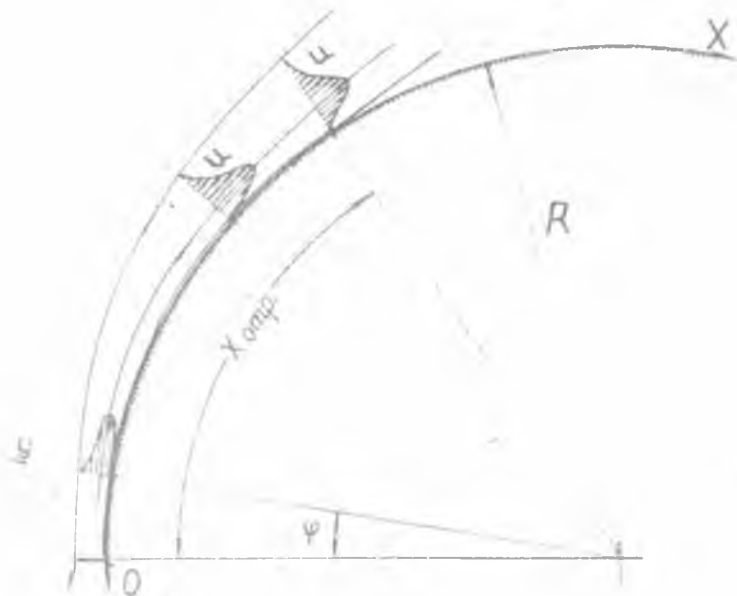


Рис. 1. Схема развития турбулентной струи на поверхности цилиндра

$$\left(1 - \frac{y}{R}\right) u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

(1.1)

$$\frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{y}{R}\right) v \right] = 0,$$

где u, v - осредненные во времени осевая и поперечная составляющие вектора скорости; τ - турбулентное касательное напряжение; p, ρ - осредненные давления и плотность; x и y - продольная и поперечная координаты; R - радиус поперечного сечения цилиндра. В уравнениях (1.1) и в дальнейшем кривизна поверхности $1/R$ учтена в первом приближении.

Рассмотрим область свободной турбулентности (III). Выразим турбулентное касательное напряжение τ через градиент осевой скорости, воспользовавшись гипотезой Прандтля [8]:

$$\tau = \rho \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{R} \right), \quad (1.2)$$

где ε - турбулентная вязкость.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при } y = 0, \\ u = 0, \quad p = p_{\infty} & \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставим (1.2) в (1.1):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{y}{R}\right) u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{y}{R}\right) v \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На основе теории переноса количества движения [8], в область П; истинной турбулентности имеем

$$\tau = \rho \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \text{при } \delta \geq y \geq \delta_1,$$

где $\varepsilon = K y$ - путь перемешивания Прандтля; K - универсальная постоянная, для плоской пластинки $K = 0,4$; δ_1 - толщина ламинарного подслоя; δ - расстояние от стенки до линии осевой максимальной скорости.

С учетом указанного выше получаем

$$\tau = \rho K^2 y^2 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{при } \delta \geq y \geq \delta_1. \quad (1.5)$$

Граничные условия

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \delta_1. \quad (1.6)$$

Рассмотрим область ламинарного подслоя (I)

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 \leq y \leq \delta_1.$$

внутренние и внешние граничные условия

$$-\tau = \omega, \quad u = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

$$u|_{y=\delta_s=0} = u|_{y=\delta_s=0}, \quad \tau|_{y=\delta_s=0} = \tau|_{y=\delta_s=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\delta_s=0} = \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\delta_s=0}$$

λ - универсальная постоянная; для плоской пластинки $\frac{\lambda}{x} \sim \Pi$.

Решение в области свободной турбулентности

Обозначим через u_s - скорость на некотором расстоянии S от насадка, а через δ_s - ширину струи в этом месте. Тогда, следуя Н.И. Акатнову [4], имеем

$$u \sim u_s \left(\frac{x}{S}\right)^{1/3}, \quad \delta \sim \delta_s \frac{x}{S}$$

Согласно гипотезе Прандтля-Рейхарда [8] $\epsilon = \epsilon_s \left(\frac{x}{S}\right)^{1/3}$, где

$\epsilon_s = \kappa \delta_s u_s$ κ - безразмерная постоянная, учитывающая характер турбулентности. Согласно уравнению неразрывности введем функцию тока ψ .

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

Второе равенство в (2.1) получено с учетом замечания о влиянии кривизны $1/R$ в первом приближении при решении задачи. Из второго уравнения (1.4), в результате непосредственного интегрирования поперек пограничного слоя от y до ∞ , имеем

$$\frac{P_\infty - P}{\rho} = \frac{1}{R} \int_y^\infty u^2 dy$$

Уравнения (1.4) сводится к уравнению третьего порядка

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \\ & = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_y^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy \right] + \epsilon_s \left(\frac{x}{S}\right)^{1/3} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вводим новые переменные

$$\xi = x, \quad \zeta = \delta \frac{y}{x} \quad (2.3)$$

δ - произвольная постоянная, зависящая от начального распределения осевой скорости.

Уравнение (2.2) в переменных x, z (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -\sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \sigma x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \sigma x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \\
 & - \sigma^2 \epsilon_s \left(\frac{x}{s} \right)^{1/3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \frac{1}{R} \left[-2x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + 2x \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 & + x \int_0^z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz - x^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz + 2x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \\
 & \left. - x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \epsilon_s \left(\frac{x}{s} \right)^{1/3} \sigma x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right].
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) ищем в виде разложения функции тока $\psi(x, z)$

$$\begin{aligned}
 \psi(x, z) = & \sigma^{-2} \epsilon_s s^{1/3} (x^{1/3} f_0(z) + \\
 & + \frac{x^{4/3}}{R} f_1(z) + \dots),
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где f_0 - решение задачи о развитии турбулентной струи вдоль твердой стенки.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях R , получим уравнения для определения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$:

$$\frac{\epsilon_s}{\sigma^{-3} \epsilon_s s^{2/3}} f_0'' + \frac{1}{3} f_0'' f_0' + \frac{2}{3} f_0'^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon_s}{\sigma^{-3} \epsilon_s s^{2/3}} f_1'' + \frac{1}{3} f_0 f_1'' + \frac{1}{3} f_0' f_1' + \frac{4}{3} f_0' f_1' = & \sigma^{-1} \left[-\frac{\epsilon_s}{\sigma^{-3} \epsilon_s s^{2/3}} f_0'' + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} 2 f_0 f_0'' + \frac{2}{3} 2 f_0'^2 - \frac{1}{3} f_0 f_0' + \frac{1}{3} \int_0^z f_0'^2 dz \right].
 \end{aligned}$$

Так как в ϵ_s содержится ещё одна свободная постоянная σ , то можем принять

$$\frac{\epsilon_s}{\sigma^{-3} \epsilon_s s^{2/3}} = \frac{4}{3}. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6) и (2.7), с учетом (2.8), имеют вид

$$4 f_0'' + f_0'' f_0' + 2 f_0'^2 = 0. \quad (2.9)$$

$$4f_0''' + f_0 f_0'' + f_0' f_0' + 4f_0'' f_0 = 6^{-1} [2f_0 f_0'' + 2f_0' f_0'^2 + \int_{\xi}^{\infty} f_0'^2 d\xi - (4f_0'' + f_0 f_0')]. \quad (2.10)$$

Соответствующие граничные условия (1.3), согласно (2.1) и (2.5), примут вид

$$\begin{aligned} f_0 = f_1 = 0 & \quad \text{при } \xi = 0, \\ f_0' = f_1' = 0 & \quad \text{при } \xi = 0, \\ f_0' = f_1' = 0 & \quad \text{при } \xi = \infty. \end{aligned}$$

Уравнение (2.9) совпадает с соответствующим уравнением в задаче о распространении плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки, полученным Н.И.Акатновым и решение имеет вид [5]

$$f_0' = \frac{1}{6} Z (1-Z^3) \quad (2.11)$$

$$\xi = 12 \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1-Z^3} = 2 \ln \frac{1+\xi+Z^3}{(1-Z)^2} + 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{Z\sqrt{3}}{2-Z}, \quad \text{где } Z = \frac{f_0}{f_0'}$$

Рассмотрим решение уравнения (2.10). В результате интегрирования уравнения (2.9) поперек пограничного слоя от ξ до ∞ , получим

$$\int_{\xi}^{\infty} f_0'^2 d\xi = 4f_0'' + f_0 f_0'. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.10) с учетом (2.12) примет вид

$$4f_1''' + f_0 f_1'' + f_0' f_1' + 4f_1'' f_0 = 6^{-1} (f_0 f_0'' + 2f_0' f_0'^2) \xi. \quad (2.13)$$

Частным решением уравнения (2.13) является

$$\bar{f}_1 = \frac{6^{-1}}{7} (6 + f_0 \xi - \frac{2}{3} f_0'^2) \xi.$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.13), совпадает с уравнением, определяющим неавтономный член в задаче о развитии плоской ламинарной струи вдоль твердой стенки в случае $\lambda = 1$, решение которого в переменной Z (2.21) имеет вид [6]

$$f_1 = C_3 Z (1-Z^3) + 12C_4 Z (1-Z^3) \int_0^Z \frac{P(\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}Z, \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}iZ, Z^3)}{Z^2(1-Z^3)^2} dZ +$$

$$+ 12C_2 z(1-z)^2 \int_0^1 \frac{f(\frac{z}{6} + i \frac{17z}{6}, \frac{z}{6} + i \frac{17z}{6}, \frac{z}{6}, \frac{z}{6})}{(1-z)^2} dz,$$

где C_1, C_2, C_3 - постоянные интегрирования, определяются из граничных условий (I.3) аналогичным методом, изложенным в [7], и равны $C_1 = \frac{\sigma^{-1}}{14}$, $C_3 = 0$, $C_2 = \sigma^{-1} \frac{2-B}{14B}$;

$$B = \frac{-\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{6} + i \frac{17}{6}) \Gamma(\frac{1}{6} - i \frac{17}{6})}, \quad \bar{B} = \frac{-\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6} + i \frac{17}{6}) \Gamma(\frac{5}{6} - i \frac{17}{6})}.$$

После вычисления гамма-функции, согласно [10], имеем

$$B = -22,6138, \quad \bar{B} = -2,9251.$$

Осевая составляющая вектора скорости

$$u = \sigma^{-1} u_3 S^{1/3} \left(\frac{f_0'(z)}{x^{2/3}} + \frac{x^{1/3}}{R} f_1'(z) + \dots \right). \quad (2.14)$$

Изменение функции f_0' и f_1' представлено в таблице I.

Таблица I

z	z	$f_0'(z)$	$f_1'(z)$
0,05	0,6064	0,0083	- 0,0022
0,1	1,1998	0,0166	- 0,0032
0,15	1,7968	0,0249	- 0,0027
0,2	2,4076	0,0331	- 0,0006
0,3	3,627	0,0486	0,0114
0,4	4,878	0,0624	0,0332
0,5	6,201	0,0729	0,0627
0,6	7,653	0,0784	0,0946
0,7	9,305	0,0766	0,1274
0,8	11,406	0,0651	0,1263
0,9	14,62	0,0406	0,0949
0,95	17,602	0,0226	0,0609
0,97	19,7154	0,0141	0,034
0,99	24,2068	0,0049	0,0043

Таким образом, в области свободной турбулентности имеем решение задачи о развитии плоской турбулентной струи вдоль криволинейной поверхности в виде разложения функции тока $\psi(x, z)$ (2.5) с учетом влияния кривизны поверхности в первом приближении.

Решение в пристенном турбулентном слое и ламинарном подслое

Полагая, что градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$, в первом приближении получаем в пристенном турбулентном слое из (1.5), с учетом (1.6)

$$\frac{u}{u_m} = 1 + C \left[2\sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}}} \right] \quad (3.1)$$

В ламинарном подслое $u = \frac{\tau_w}{\mu} y$. Оценим толщину ламинарного подслоя. Из условия (1.7) имеем $\frac{\tau_1}{\mu} = \frac{\kappa_1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}} \cdot \frac{1}{z_1}$. Считая $\frac{\delta_1}{\delta} \ll 1$, то $\tau_1 \approx \tau_w$. Тогда $\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\kappa_1}{\kappa} \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}$.

Полагая, что справедлив закон трения для плоской пластинки [8] и число $Re = \frac{u \delta}{\nu} > 20000$, получим

$$\frac{\delta_1}{\delta} < 0,01.$$

Полуэмпирический метод определения постоянных

для определения неизвестных постоянных, входящих в выражение осевой составляющей скорости (2.14) и (3.1), обратимся к экспериментальным исследованиям плоской турбулентной струи вдоль криволинейной поверхности. Плоская струя формировалась при помощи плоского сопла ($20 \times 200 \text{ мм}^2$), сфигурированного согласно кривым Витонинского [11]. По касательной к одной из сторон сопла устанавливалась цилиндрическая поверхность ($R = 50 \text{ см}$), число $Re = \frac{u d}{\nu} = 26600$, где d - ширина сопла, т.е. имелся турбулентный режим течения.

Измерение скоростей в струе проводилось при помощи микротрубки Пито-Прандтля (наружный диаметр 1,9 мм), которая закреплялась в координатник с ценой деления 0,5 мм, позволяющий перемещать микро-

трубку в горизонтальном и вертикальном направлениях, производить ее вращение. В качестве вторичного регистрирующего прибора использовался микроанометр типа ММН с точностью измерений до 0,2 мм спиртового столба. Скорости измерялись по длине струи через калибр и поперек струи через 1 мм вблизи стенки и через 5 мм - вдали.

В результате экспериментальных исследований было установлено, что струю, развивающуюся вдоль цилиндрической поверхности, можно разбить на три участка (рис. 1): начальный, $0 \leq \frac{x}{a} \leq 6$ калибров основной, $6 \leq \frac{x}{a} \leq 18$ калибров, предотрывный $18 \leq \frac{x}{a}$ до точки отрыва (на этом участке автомодельность нарушается).

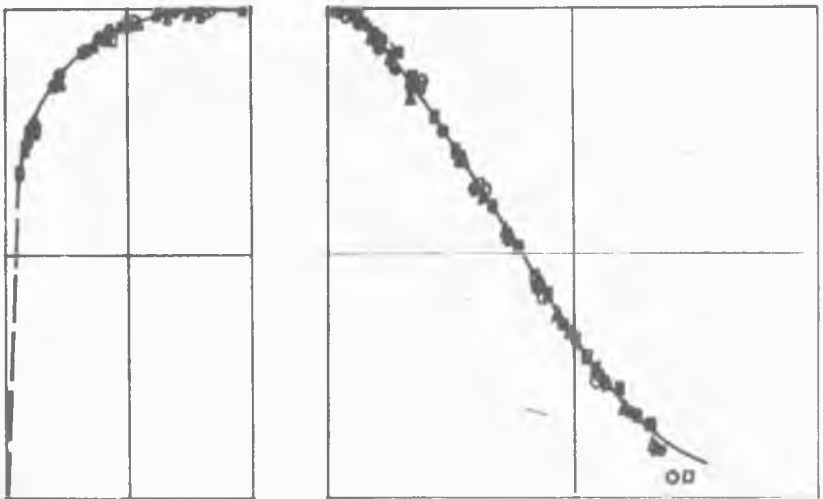


Рис. 2. Изменение осевой скорости по сечениям струи

$\sigma - x = 140$ мм, $\square - x = 160$ мм, $\Delta - x = 200$ мм
 $\circ - x = 300$ мм, $\blacktriangle - x = 320$ мм $\blacksquare - x = 340$ мм

- а). Ламинарный подслой и турбулентный пристенный слой.
 б). Область свободной турбулентности.

На рис. 2а представлено изменение осевой скорости струи по длине струи в зоне пристенной турбулентности. Из сравнения экспериментального и теоретического распределения осевых скоростей в пристенном слое, получим

$$C = 0,145. \quad (4.1)$$

Это решение описывает течение в основной области.

На рис. 2б представлено изменение осевой скорости струи по длине струи в зоне свободной турбулентности, где принято

$$\frac{y - y_{um}}{y_{um}} = n(z - z_{um}). \quad (4.2)$$

В результате сравнения экспериментальных значений осевой скорости струи в сечении $\frac{x}{d} = 15$ с формулой (2.14) была определена постоянная n , которая оказалась равной

$n = 0,118$. Полученное решение описывает течение в основной области.

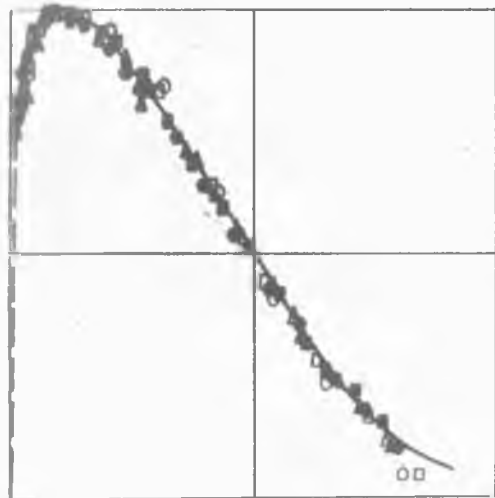


Рис. 3. Изменение осевой скорости по сечениям струи

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ○ — $x = 140$ мм, | □ — $x = 160$ мм, |
| △ — $x = 200$ мм | ● — $x = 300$ мм |
| ▲ — $x = 320$ мм | ■ — $x = 340$ мм |

На рис. 3 представлено изменение скорости u/u_m по сечениям струи, где левая ветвь до точки 0,22 найдена полуэмпирическим методом, а правая ветвь — методом асимптотического приближения.

На рис. 4 представлено изменение безразмерной максимальной скорости по длине струи, где принято $\bar{u} = \frac{u_{00}^{0,75}}{u_s^{0,75}}$.

В результате сравнения экспериментальных значений максимальной осевой скорости в различных сечениях с формулой (2.14) была определена постоянная $b = 28$.

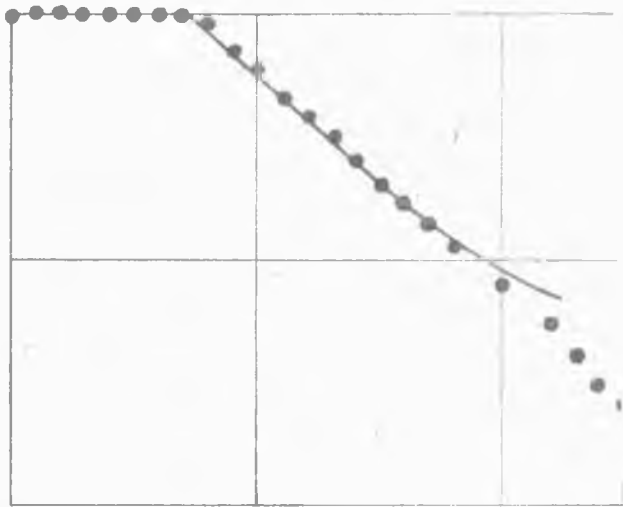


Рис. 4. Изменение максимальной осевой скорости по длине струи

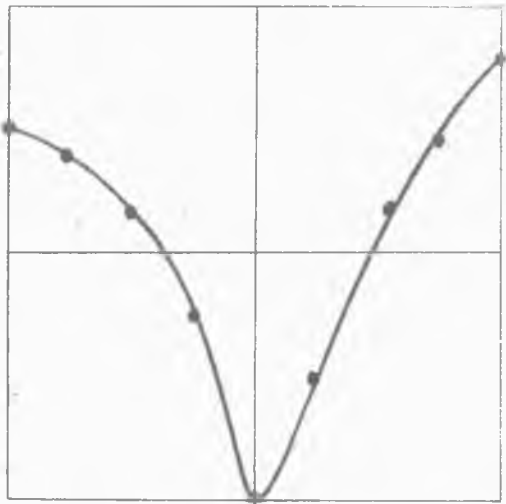


Рис. 5. Изменение статического давления на поверхности цилиндра в области отрыва струи

Отрыв струи от цилиндрической поверхности определялся из анализа поведения давления на поверхности цилиндра. Струя отрывалась на расстоянии, соответствующем 24 калибрам, что составляет 0,96 радиан. Изменение давления на поверхности цилиндра в области отрыва дано на рис. 5. Здесь

$$P^* = \frac{P}{\rho \frac{u^2}{2}}$$

Литература

1. Newman B.G. The deflection of plane jets by arbitrary boundaries-Coanda effect, In Boundary-Layer and Flow Control, edit by S.L. Zachman, Oxford, 1961. Perg. Press.
2. Nakaguchi H. Jet along a curved wall... T. Meniya Memorial Seminar for Aerodynamics R. and M. 4, 1961.
3. Ketele F.S. Coanda flow of a two-dimensional wall jet on the outside of a circular cylinder, 17th Int. Conf. of Montreal, Rep. N° 62-14, 1963.
4. Акатнов Н.И. О распространении плоской турбулентной струи вдоль твердой стенки. Труды ЛПИ им. Калинина, 198, 1958.
5. Акатнов Н.И. О распространении плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Труды ЛПИ, 5, 1953.
6. Коробко В.И., Фалькозич С.В., Некоторые неавтономные задачи теории струйных течений, МЖГ, 2, 1970.
7. Коробко В.И. Некоторые задачи струйных течений вязкой жидкости. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ-мат. наук, СГУ, Саратов, 1971.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., "Наука", 1969.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. М., "Наука", 1965.
10. Таблицы логарифмов гамма-функций в комплексной области. ВЦ АН СССР, М., 1956.
11. Талиев В.Н. Аэродинамика вентиляции. Стройиздат, 1963.