Л.[illegible].МОГИЛЕВИЧ

# О НЕЛИНЕЙНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ряд явлений целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины избыточного давления, несмотря на малую его величину.

Законы затухания ударных волн в газе с постоянной плотностью на далеких расстояниях от места взрыва определяются этой зависимостью [I, 2]. В настоящей работе применяется метод сращиваемых асимптотических разложений.

Течение вблизи фронта волны исследуется с помощью "внутреннего" [3, 4] асимптотического разложения, для первого члена которого получаются нелинейные уравнения, аналогичные уравнениям теории коротких волн [2, 5, 6]. Для получения решения, равномерно пригодного во всей области течения, как вблизи фронта волны, так и вдали от него, внутреннее и внешнее разложения сращиваются.

Законы движения фронтов ударных волн определяются из условий динамической совместности, зависят от величины избыточного давления и являются обобщением соответствующих законов для однородного газа [I]. В качестве примера рассмотрена задача о движении поршня по степенному закону.

1. Рассмотрим движение волны малых возмущений ( в том числе и слабой ударной волны) в идеальном, политропическом, покоющемся газе с давлением $p_0 = const$ по каналу, поперечное сечение которого изменяется по закону

$$A = A_0 r^{\nu}, \tag{1.1}$$

где $A_0, \nu - const$ ; $r$ - пространственная координата.

Плотность невозмущенного газа перед фронтом волны имеет вид

$$\rho_0 = \omega r^{(s)}, \ \omega = const, \quad s = const, \tag{1.2}$$

т.е. площадь поперечного сечения канала и начальная плотность удовлетворяют экспоненциальному закону распределения

$$A = A_0 e^{\beta \frac{r}{r_0}}; \quad \rho_0 = \rho_\infty e^{\theta \frac{r}{r_0}}; \ \rho_\infty, r_0, \beta, \theta - const. \tag{1.3}$$

В гидравлическом приближении движение газа за фронтом волны описывается уравнениими [7]

$$\begin{gathered} v_t + v v_r + p_r/\rho = 0, \\ \rho_t + (\rho v)_r + \frac{d \ln A}{dr}(\rho v) = 0, \\ (p/\rho^{\gamma})_t + v (p/\rho^{\gamma})_r = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $v$ - скорость газа; $t$ - время; $\gamma$ - показатель адиабаты.

Если волна возмущений представляет собой ударную волну, распространяющуюся по покоющемуся газу, то на ее фронте выполняются условия

$$v = \frac{2}{\gamma+1} a_0 \left[ W/a_0 - a_0/W \right], \quad a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}, \tag{1.5}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{(\gamma+1)(W/a_0)^2}{2+(\gamma-1)(W/a_0)^2}, \quad \frac{p - p_0}{\gamma p_0} = \frac{2}{\gamma+1} \left[ (W/a_0)^2 - 1 \right]$$

где $W$ - скорость ударной волны; $a_0$ - скорость звука в невозмущенном газе.

Кроме условий (I.5), должны быть заданы дополнительные граничные условия, характеризующие конкретные задачи. Например, условие на поршне в задаче о движении газа, вытесняемого поршнем.

$$r = r_n^*(t), \qquad r = r_n(t). \tag{I.6}$$

Следует отметить, что в случае степенного закона изменения площади канала (I.I), для $\nu$ = I; 2; 3 уравнения (I.4) представляют собой точные уравнения одномерных движений газа с плоской, цилиндрической, сферической симметрией соответственно.

Перейдем к безразмерным зависимым

$$P = \frac{p - p_0}{\gamma p_0}, \quad R = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad u = \frac{v}{a_0}, \quad V = \frac{W}{a_0} \tag{I.7}$$

и независимым переменным

$$X = \sqrt{\frac{\omega}{\gamma p_0}}\, \frac{r^{1+s/2}}{(1+s/2)t}, \quad \tau = \frac{t_0}{t} \tag{I.8}$$

в случае степенного закона распределения плотности (I.2);

$$X = \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\gamma p_0}}\, \frac{2r_0}{\theta t}\, e^{\frac{\theta r}{2r_0}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\gamma p_0}}\, \frac{2r_0}{\theta t} \tag{I.9}$$

в случае экспоненциального распределения плотности (I.3) при $\theta \neq 0$.

В зависимости от условия типа (I.6), характеризующих задачу, безразмерные параметры потока могут не зависеть от $\tau$.

В общем случае в безразмерных переменных (I.7) - (I.9) уравнения (I.4) согласно (I.I), (I.2) примут вид

$$\begin{gathered} -\tau u_\tau + (u - X)u_X - k u^2/X + P_X/(1+R); \\ -\tau R_\tau - X R_X + [(1+R)u]_X + 2(m+k)(1+R)u/X \quad 0; \end{gathered} \tag{I.10}$$

$$-(\tau P_\tau + X P_x)(1+R) + (\tau R_\tau + X R_x)(1+\gamma P) +$$
$$u(1+R)P_x - (1+\gamma P)(R_x + 2\kappa(1+R)/X] = 0, \qquad (1.10)$$

где $K = \frac{s}{2+s}$, $m = \frac{\nu}{2+s} - \frac{1}{2}$ для (I.I), (I.2) и
$K = 1$, $m = \frac{\beta}{\theta} - \frac{1}{2}$ для (I.3).

Условия динамической совместности (I.5) примут вид

$$u = \frac{2}{\gamma+1}[V - V^{-1}], \quad P = \frac{2}{\gamma+1}[V^2 - 1],$$
$$R = [V^2 - 1][1 + \frac{\gamma-1}{2}V^2]^{-1}, \quad V = X - \tau X_\tau. \qquad (1.11)$$

Если фронт волны есть звуковая линия, то вместо условий (I.II) имеют место условия

$$X = V = \pm 1, \quad P(\pm 1, \tau) = R(\pm 1, \tau) = u(\pm 1, \tau) = 0.$$

Граничные условия, характеризующие задачу (I.6), примут вид

$$u = X - \tau X_\tau, \quad X = X(\tau) \qquad (1.12)$$

Проблема распространения сильных ударных волн исследована в [8, 9, 10].

2. Рассмотрим слабую волну возмущения. Параметры потока за фронтом волны мало отличаются от параметров невозмущенного течения перед фронтом.

Решение уравнений (I.10) представим в виде внешнего асимптотического разложения

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + \ldots, \quad P = P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots, \quad R = R^{(1)} + R^{(2)} + \ldots \qquad (2.1)$$

где $1 \gg U^{(1)} \gg U^{(2)} \gg \ldots,\ 1 \gg P^{(1)} \gg P^{(2)} \gg \ldots,\ 1 \gg R^{(1)} \gg R^{(2)} \gg \ldots$.

Для первых членов разложения (2.I) получим линейные уравнения акустической теории [9, I0]. Вводя безразмерный потенциал скорости $f^{(1)}$

$$f_X^{(1)} = U^{(1)}, \tag{2.2}$$

исключая из полученной системы безразмерную плотность $R^{(1)}$, получим систему уравнений

$$(1-X^2)f_{XX}^{(1)} - 2X\tau f_{X\tau}^{(1)} - \tau^2 f_{\tau\tau}^{(1)} + \frac{2m}{X} f_X^{(1)} = 0, \tag{2.3}$$

$$P^{(1)} = X f_X^{(1)} + \tau f_\tau^{(1)} - f^{(1)},$$

которая в характеристических переменных приводится к виду Эйлера-Дарбу

$$\Psi_{\xi\zeta} - \frac{m}{\zeta-\xi}(\Psi_\zeta - \Psi_\xi) = 0, \quad \xi = \frac{1-X}{2\tau}, \tag{2.4}$$

$$\zeta = \frac{1+X}{2\tau}, \quad \Psi = (\xi+\zeta) f^{(1)}.$$

Например, при $m = 0$ получим решение (2.4) в виде

$$f^{(1)} = \tau\left[F\left(\frac{1-X}{2\tau}\right) + G\left(\frac{1+X}{2\tau}\right)\right], \quad P^{(1)} = -\frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1-X}{2\tau}\right) + G^{(1)}\left(\frac{1+X}{2\tau}\right)\right] \tag{2.5}$$

В случае $m = 1$ получим

$$f^{(1)} = \tau\left[F\left(\frac{1-X}{2\tau}\right)\right], \quad P^{(1)} = -\frac{1}{2}\left[F'\left(\frac{1-X}{2\tau}\right) + G'\left(\frac{1+X}{2\tau}\right)\right]. \tag{2.6}$$

В общем случае целых положительных значений $m$ получим

$$\Psi = \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}}\left[\frac{F(\xi)}{\zeta-\xi}\right] + \frac{\partial^{m-1}}{\partial \zeta^{m-1}}\left[\frac{G(\zeta)}{\zeta-\xi}\right].$$

Уравнение (2.3) обладает инвариантно-групповым решением

$$f^{(1)} = \tau^n H(X) \qquad (2.7)$$

$$(1-X^2)H'' - 2nXH' - n(n-1)H + \frac{2m}{X}H' = 0.$$

При $n$ = 0 получим решение в виде

$$u^{(1)} = f_X^{(1)} = H' = D_1(1-X^2)^m X^{-2m} \qquad (2.8)$$

В общем случае, вводя переменные

$$H = X^{1-n}Q(z), \quad z = \frac{1}{2}(1+X^{-1}),$$

уравнение (2.7) можно привести к гипергеометрическому типу [9,10]

$$z(1-z)Q'' + [c-(1+a+b)z]Q^{(1)} - abQ = 0,$$

$$a = n-1, \quad b = n-2m, \quad c = n-m$$

Скорость фронта волны в акустическом приближении $X = V = \pm 1$.
Согласно (2.7), вблизи фронта волны, распространяющейся в положительном направлении оси $X$ ($X$ = I), получим разложение

$$u^{(1)} = \tau^{(n)}H' = D_1\tau^n(1-X)^{m+n} \qquad (2.9)$$

Для волны, распространяющейся в противоположном направлении, вблизи фронта ($X$ = -I) имеет место разложение, аналогичное (2.9).

В общем случае, если граничные условия типа (I.I2), характеризующие задачу, таковы, что вблизи фронта волны имеет место разложение

$$f_X^{(1)} = u^{(1)} = P^{(1)} = R^{(1)} = \varepsilon O[(1-X)^2], \quad \varepsilon \ll 1, \qquad (2.10)$$

для второго члена разложения (2.I) можно получить вблизи фронта волны ( $X = 1$ )

$$u^{(2)} = P^{(2)} = R^{(2)} = \varepsilon^2 O\left[(1-X)^{-1-2q}\right]. \qquad (2.11)$$

Согласно (2.I0), (2.II) имеет место задача нерегулярных возмущений [3] при $q > -1$

$$1 - X = O(\varepsilon^{1/(1+q)}), \quad u^{(1)} = u^{(2)} = O(\varepsilon^{1/(1+q)}). \qquad (2.12)$$

3. В области нерегулярности разложения (2.I), вблизи фронта волны, решение системы уравнений (I.I0) представим в виде внутреннего асимптотического разложения

$$P = \frac{2}{\gamma+1}\lambda\pi + \cdots, \quad R = \frac{2}{\gamma+1}\lambda\varkappa + \cdots; \qquad (3.1)$$

$$u = \frac{2}{\gamma+1}\lambda\mu + \cdots; \quad X = 1 + \lambda\delta,$$

где $\lambda \ll 1$ , связано с $\varepsilon$ согласно (2.I2); $\pi, \varkappa, \mu, \delta$ – величины порядка единицы.

Подставляя (3.I) в систему уравнений (I.I0), для первых членов разложения получим систему нелинейных уравнений

$$\mu = \pi = \varkappa, \quad -\tau\mu_\tau + (\mu - \delta)\mu_\delta + m\mu = 0. \qquad (3.2)$$

Из условий динамической совместности (I.II) получим

$$\mu = \pi = \varkappa = 2(\delta - \tau\delta_\tau), \quad V = 1 + \lambda(\delta - \tau\delta_\tau). \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и условия (3.3) аналогичны уравнениям и условиям теории коротких волн [2] для одномерных волн ( $\nu = 1, 2, 3$ ), распространяющихся по газу с постоянной плотностью ( $s = 0$ ) (I.I – I.2).

Если течение не зависит от $\tau$ ( $\frac{\partial}{\partial\tau} = 0$ ) , то полагая на фронте ударной волны $\delta = 1$, получим

$$\mu(1) = \pi(1) = \varkappa(1) = 2. \qquad (3.4)$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\delta = \tau M(\mu\tau^{-m}) + \frac{\mu}{1-m}, \quad m \neq 1, \tag{3.5}$$

$$\delta = \tau M(\mu\tau^{-1}) - \mu \ln \tau, \quad m = 1.$$

Решение (3.5) перепишем в виде

$$\mu = \tau^{m} L\left(\delta/\tau - \frac{\mu}{(1-m)\tau}\right), \quad m \neq 1,$$

$$\mu = \tau L\left[(\delta + \mu \ln \tau)\tau^{-1}\right], \quad m = 1. \tag{3.6}$$

Здесь $L$-функция обратная произвольной функции $M$.

Если решение уравнения (3.2) не зависит от $\tau$, то получим

$$\delta = C\mu^{1/m} + \frac{\mu}{1-m}, \quad m \neq 1,$$

$$\delta = C\mu - \mu \ln \mu, \quad m = 1. \tag{3.7}$$

Подставляя решение (3.5) в условия (3.3) получим закон движения фронта ударной волны

$$\mu = \tau^{\frac{1+m}{2}} \sqrt{D - 2(1-m)\int \zeta M'(\zeta)\, d\zeta}, \quad \zeta = \mu\tau^{-m}, \quad m \neq 1,$$

$$\mu = \tau\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{-1} \sqrt{D - 2\int \zeta M'(\zeta)\, d\zeta}, \quad \zeta = \mu\tau^{-1}, \quad m = 1, \tag{3.8}$$

где $D$ - постоянная интегрирования.

Формулы (3.8) аналогичны законам Л.Д.Ландау [I,5].
Для течения, не зависящего от $\tau$, согласно (3.4), (3.7) определим постоянную $C$

$$C = -\frac{1+m}{1-m} 2^{-\frac{1}{m}}, \ (m \neq 1); \ C = \frac{1}{2} + \ln 2, \ (m = 1). \tag{3.9}$$

Кроме условий на фронте ударной волны (3.3), внутреннее решение (3.6) должно удовлетворять условию сращивания (3.4) с внешним разложением (2.I), при этом определяется произвольная $L$ в решении (3.6), если внешнее решение полностью определено.

4. Рассмотрим движение газа, вытесняемого поршнем, движущимся по закону

$$X = \varepsilon\,,\quad u = X - \tau X_\tau = \varepsilon\,,\quad \varepsilon \ll 1. \qquad (4.1)$$

Параметр времени $\tau$ не входит в (4.I), следовательно, течение не зависит от $\tau$.

Уравнения, описывающие поведение параметров потока между поршнем и фронтом ударной волны, имеют вид (I.IO) при $\frac{\partial}{\partial\tau} = 0$. Внешнее (акустическое) решение (2.8), удовлетворяющее условию на поршне (I.I2), (4.I) имеет вид

$$u^{(1)} = f_X^{(1)} = \varepsilon^{1+2m}(1-\varepsilon^2)^{-m}(1-X^2)^m X^{-2m}. \qquad (4.2)$$

Для того, чтобы условие (2.I) выполнялось, необходимо $m > \frac{1}{2}$.

Внутреннее (теории коротких волн) решение, удовлетворяющее условиям динамической совместности, имеет вид (3.7), (3.9).

Для получения пригодного во всей области решения и определения положения фронта ударной волны $(X - V - 1 + \lambda)$ срастим одночленные внешнее и внутреннее разложения.

Одночленное внутреннее разложение одночленного внешнего разложения (4.2) имеет вид

$$u = \varepsilon^{1+2m}\lambda^m(-2\delta)^m = \varepsilon^{1+2m}[2(1-X)]^m. \qquad (4.3)$$

Одночленное внешнее разложение одночленного внутреннего разложения (3.7) имеет вид

$$\text{при } m \neq 1,\quad u = \frac{2\lambda}{j+1}(-C)^{-m}(-\delta)^m = \frac{2\lambda^{1-m}}{j+1}[-C^{-1}(1-X)]^m, \qquad (4.4)$$

$$\text{при } m = 1,\quad u = \frac{2(\ln{}^{1}/_{\lambda})^{-1}}{j+1}(1-X)$$

Из условия равенства (4.3), (4.4) получим

$$\lambda = \left[\tfrac{j+1}{2}(-2C)^m\right]^{1/(1-m)}\varepsilon^{(1+2m)/(1-m)},\quad (m \neq 1) \qquad (4.5)$$

$$\lambda = \exp[-(j+1)^{-1}\varepsilon^{-3}],\quad (m = 1).$$

Так как по условию (3.I) $\lambda \ll 1$ и учитывая $m > -\frac{1}{2}$, получим $m < 1$, согласно первой формуле (4.5); при $m = 1$ получим вторую формулу (4.5).

В частном случае (I.I), (I.2) при $\nu = 1;\ 2;\ 3$, и $\delta = 0$ получим положение фронта одномерной волны с плоской, цилиндрической или сферической симметрией, распространяющейся в газе с постоянной плотностью, аналогичное полученному в [II, I2, I3] другим методом.

5. Рассмотрим частный случаи $m = 0$, обобщающий плоскую волну в газе с постоянной плотностью.

Пусть закон движения поршня (I.I3) имеет вид

$$X = \frac{\varepsilon}{1-q}\tau^{q},\quad u = \varepsilon\tau^{q},\quad q \neq 1,\ \varepsilon \ll 1,\ \varepsilon\tau^{q} \ll 1. \qquad (5.1)$$

Последнее соотношение (5.I) является условием возможности использования метода малого параметра (малые возмущения).

Одночленное внешнее разложение (2.I) имеет вид (2.5) для волны, распространяющейся в положительном направлении оси $X$.

$$f_X^{(1)} = u^{(1)} = P^{(1)} = -\frac{1}{2}F'\left(\frac{1-X}{2\tau}\right).$$

Удовлетворяя условию на поршне (5.I) (снося это условие в $X = 0$), получим

$$u^{(1)} = \varepsilon\tau^{q}(1-X)^{-q} \qquad (5.2)$$

Одночленное внутреннее разложение имеет вид (3.6 )

$$\mu = L[(\delta-\mu)\tau^{-1}]. \qquad (5.3)$$

Из условия сращивания (5.2), (5,3) получим

$$L = \frac{\gamma+1}{2}\tau^{q}(-\delta+\mu)^{-q},\quad \lambda = \varepsilon^{\frac{1}{1+q}},\quad q > -1. \qquad (5.4)$$

Закон движения фронта ударной волны, согласно (3.5), (3.6), (3.8), (5.4) имеет вид $\mu = \sqrt{\tau}\sqrt{D - \frac{2}{q-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/q}\mu^{\frac{q-1}{q}}}$.

6. В частном случае $m$ = I, обобщающем сферическую волну, рассмотрим движение поршня по закону

$$X = \varepsilon\tau^{\frac{1+q}{3}}, \qquad u = \varepsilon\frac{2-q}{3}\tau^{\frac{1+q}{3}}, \qquad (6.1)$$
$$q \neq 2, \ \varepsilon \ll 1, \ \varepsilon\tau^{\frac{1+q}{3}} \ll 1.$$

Последнее соотношение (6.I) есть условие применимости метода малого параметра.

Акустическое решение (2.6) для волн, распространяющихся в положительном направлении оси $X$, имеет вид

$$f_X^{(1)} = u^{(1)} = -\frac{\tau}{2X}F'\left(\frac{1-X}{2\tau}\right) - \frac{\tau^2}{X^2}F\left(\frac{1-X}{2\tau}\right), \quad p^{(1)} = -\frac{\tau}{2X}F'\left(\frac{1-X}{2\tau}\right).$$

Удовлетворяя условию на поршне (6.I) (снося это условие в $X$ = 0), получим

$$u^{(1)} = \varepsilon^3\frac{2-q}{3}(1-q)\tau^{1+q}\frac{(1-X)^{-q}}{X} + \varepsilon^3\frac{2-q}{3}\tau^{1+q}\frac{(1-X)^{1-q}}{X^2}. \qquad (6.2)$$

Одночленное внутреннее решение имеет вид (3.6). Из условия сращивания (6.2), (3.6) получим

$$\mu = \frac{\gamma+1}{2}\frac{2-q}{3}(1-q)\tau^{1+q}(-\delta-\mu\ln\tau)^{-q},$$
$$\lambda = \varepsilon^{\frac{3}{1+q}}, \quad q > -1. \qquad (6.3)$$

Случай $q$ = -I рассмотрен в параграфе 4.

Закон движения фронта ударной волны, согласно (3.8), (6.4), имеет вид

$$\mu = \tau\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{-1/2}\sqrt{D - \frac{2}{q-1}\left[\frac{\gamma+1}{2}\frac{2-q}{3}(1-q)\right]^{1/q}(\mu/\tau)^{\frac{q-1}{q}}}.$$

7. Рассмотрим течение в канале, площадь поперечного сечения

которого меняется по экспоненциальному закону (I.3), а плотность невозмущенного газа постоянна $\theta = 0$.

Вводя безразмерные зависимые переменные по формуле (I.7), а независимые переменные по формуле

$$X = \frac{r}{a_0 t}\ ,\quad \tau = \frac{r_0}{a_0 t}\ ,$$

для первых членов внешнего разложения (2.I), получим систему акустических уравнений

$$(1-X^2) f^{(1)}_{XX} - 2X\tau f^{(1)}_{X\tau} - \tau^2 f^{(1)}_{\tau\tau} + \frac{\beta}{\tau} f^{(1)}_X = 0, \qquad (7.1)$$

$$P^{(1)} = X f^{(1)}_X + \tau f^{(1)}_\tau - f^{(1)},$$

которая в характеристических переменных

$$\xi = \frac{1-X}{2\tau}\ ,\quad \zeta = \frac{1+X}{2\tau}\ ,\quad \Psi = (\xi + \zeta) f^{(1)}$$

приводится к виду

$$\Psi_{\xi\zeta} - \frac{\beta}{2}\left(\Psi_\zeta - \Psi_\xi\right) = 0.$$

Для первых членов внутреннего разложения (3.I) получим систему нелинейных уравнений

$$\mu = \mathcal{G} = \mathcal{H}\ ,\quad -\tau \mu_\tau + (\mu - \delta)\mu_\delta + \frac{\beta}{2}\frac{\mu}{\tau} = 0 \qquad (7.2)$$

и условия динамической совместности (3.3).

Согласно (7.I), (7.2), течение не может не зависеть от $\tau$. Общее решение уравнений (7.2) имеет вид

$$\delta = \tau M\left(\mu e^{\frac{\beta}{2\tau}}\right) - \frac{2\tau}{\beta}\mu \qquad \text{или} \qquad \mu = e^{-\frac{\beta}{2\tau}} L\left(\frac{\delta}{\tau} + \frac{2\mu}{\beta}\right), \qquad (7.3)$$

где $L$ - функция, обратная произвольной функции $M$, определяется из условия сращивания с внешним разложением (решением акустического уравнения (7.I).

Подставляя решение (7.3) в условия динамической совместимости (3.3), получим закон движения фронта ударной волны

$$\mu = e^{-\frac{\beta}{4\tau}} \sqrt{D + \beta \int \zeta M'(\zeta) d\zeta}, \quad \zeta = \mu e^{\frac{\beta}{2\tau}}.$$

<u>Литература</u>

I. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ. т. 9, вып. 4, 1945.

2. Христианович С.А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, т. 20, вып. 5, 1956.

3. Ван-дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М. "Мир", 1967.

4. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М. "Наука", 1970.

5. Рыжов О.С. О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966.

6. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. ПМТФ № I, 1960.

7. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Изд. 2. М. "Наука", 1971.

8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 6, М. "Наука", 1967.

9. Черноусько Ф.Л. Сходящиеся ударные волны в газе переменной плотности ПММ, т. 24, вып. 5, 1960.

IO. Мозжилкин В.В., Фалькович С.В. Распространение ударных волн в среде с экспоненциально меняющейся плотностью. Изв. АН СССР, МЖГ № 6, 1970.

II. M.J. Lighthill. A technique for fendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Phylos. Mag. (7), 40.pp. 1179-1202, 1949.

12. G.B. Whitham. On propogation of weak shock waves J. Fluid Mech. v. 1, N3, 1956.

13. Цянь Сюэ-сень. Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го. Сб. Проблемы механики, вып. П.И.Л., 1959.

В.И.КОРОБКО, В.К.ШАШМИН

## РАЗВИТИЕ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Струйные течения, развивающиеся на криволинейных поверхностях, характеризуются перепадам давления поперек области течения и вдоль нее. Например, струя, развивающаяся на поверхности цилиндра, прилипает к поверхности на значительной ее протяженности (эффект Коанда). Это обстоятельство используется в пневмонике и авиационной технике.

Из множества работ, посвященных исследованию развития турбулентных струй на криволинейных поверхностях, следует отметить работы Невмана [I], Н.Накагухи [2], и Ж.Фекета [3], которые изучили развитие струи на поверхности цилиндра и получили различные эмпирические соотношения, описывающие изменения аэродинамических характеристик струй.

В настоящей работе рассмотрена задача развития плоской турбулентной струи на поверхности цилиндра на основе обобщенных уравнений турбулентного пограничного слоя и результатов экспериментальных исследований. При решении задачи выбрана трехслойная схема разбиения пограничного слоя, т.е. вся область течения делится на три слоя: I - ламинарный подслой $[\varepsilon_I = const]$, II - пристенный турбулентный слой $/\varepsilon_{II} \sim y U_m/$, III - свободный турбулентный слой $(\varepsilon_{III} \sim x U_m)$.

### Постановка задачи

Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в плоском турбулентном пограничном слое, развивающемся на цилиндрической поверхности, в цилиндрической системе координат, имеют вид (рис. I).