

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ  
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Свободные упругие продольные колебания ЛА в связанной системе координат описываются уравнениями вида I

$$\frac{\partial}{\partial x} [B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}] = m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{d^2 u_{\nu}(t)}{dt^2}, \quad (1)$$

$$m_{\nu} \frac{d^2 u_{\nu}(t)}{dt^2} + C_{\nu} [u_{\nu}(t) - u(x_{\nu}, t)] = 0, \quad (2)$$

где  $B(x) = E(x)F(x)$  - жесткость корпуса при сжатии-растяжении;  $m(x)$  - погонная масса корпуса;  $m_{\nu}$  - масса  $\nu$ -ого сосредоточенного груза;  $C_{\nu}$  - жесткость крепления  $\nu$ -ого груза к корпусу;  $u(x, t)$  - смещение сечения корпуса вдоль оси при колебаниях;  $u_{\nu}(t)$  - смещения  $\nu$ -ого груза вдоль оси  $x$  при колебаниях. Не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать лишь свободные колебания ЛА. В случае полета граничные условия имеют вид:

$$B(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

на концах ЛА.

Существует несколько общепринятых методов моделирования уравнений (1) и (2):

- конечно-разностный метод по координате  $x$  ;
- метод интегрирования уравнений колебаний в обобщенных координатах;
- метод дискретизации системы.

Первый метод неприемлем в случае разрывных эпюр  $n_1(x)$  и  $B(x)$  так как требует большого числа узловых точек и, следовательно, операционных усилителей для своей реализации. Второй метод связан большим объемом предварительных вычислительных работ по определению форм и частот свободных колебаний и их статистических характеристик.

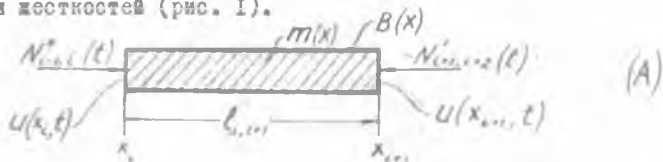
Метод дискретизации упругой системы наиболее удобен при решении статистических задач на аналоговых вычислительных машинах. Этот метод предлагает замену механической системы с распределенными параметрами некоторой системой с сосредоточенными массами и безмассовыми пружинами, соединяющими эти массы. Однако, нет четко обоснованного алгоритма вычисления количества масс, их значений и величин жесткостей пружин. Все это приводит к тому, что сходимость решения задачи в каждом конкретном случае требует специального обоснования. В некоторых случаях сходимость отсутствует.

Ниже предлагается модифицированный метод дискретизации упругой системы (ЛА), свободный от недостатков всех перечисленных выше методов и представляющий хорошую возможность статистических исследований на ЭАВМ.

Задача ставится так: найти алгоритмы для определения оптимальных длин участков, величин сосредоточенных масс и жесткостей пружин, обеспечивающих сходимость решений и простоту статистических испытаний.

Уравнения (2), описывающие колебания сосредоточенных грузов, моделируются просто, как уравнения осцилляторов с правой частью, равной  $C_{\nu}U(x_{\nu}, t)$ . При этом, решая статистическую задачу, коэффициенты  $m_{\nu}$  и  $C_{\nu}$  (или  $\omega_{\nu}^2 = \frac{C_{\nu}}{m_{\nu}}$ ) можно менять согласно законам распределения вероятностей. Таким образом, остается рассмотреть метод моделирования уравнения (I) в частных производных, то есть уравнения колебаний несущего корпуса ЛА как балки.

Рассмотрим участок корпуса ЛА между сечениями  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , внутри которого нет сосредоточенных грузов и разрывов в эпюрах масс и жесткостей (рис. I).



Со стороны соседних участков на него действуют некоторые силы  $N_{i-1,i}''(t)$ ,  $-N_{i+1,i+2}'(t)$ , являющиеся внешними для рассматриваемого участка. Деформация этого участка описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ B(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right] = m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

и граничными условиями

$$B(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -N_{i-1,i}'' \quad \text{при } x=x_i, \quad (4)$$

$$B(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -N_{i+1,i+2}' \quad \text{при } x=x_{i+1}.$$

Эквивалентом этого участка в дискретном представлении будем считать двухмассовую систему (рис. 2), где  $m_i''$  и  $m_i'$  - сосредоточенные массы;  $C_{i,i+1}$  - жесткость пружины;  $l_{i,i+1}$  - длина участка.

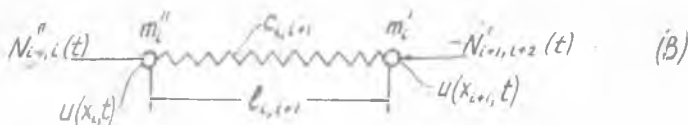


Рис. 2.

Неизвестные параметры  $m_i''$ ,  $m_i'$  и  $C_{i,i+1}$  системы (B) будем искать из условий одинаковости соответствующих перемещений концов систем (A) и сосредоточенных масс системы (B) при заданных внешних силах. Внутренняя упругая сила деформированной пружины равна

$$N_{i,i+1}(t) = C_{i,i+1} [U(x_{i+1}, t) - U(x_i, t)].$$

Далее проинтегрируем дважды по  $x$  уравнение (3) с учетом граничных условий (4)

$$B(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \int_{x_i}^x m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx - N_{i,i+1}''(t);$$

$$U(x,t) = \int_{x_i}^x \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^x m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx^2 - N_{i,i+1}''(t) \int_{x_i}^x \frac{dx}{B(x)} + U(x_i, t).$$

Откуда при  $x = x_{i+1}$ , имеем

$$-N_{i+1,i+2}''(t) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx - N_{i,i+1}''(t);$$

$$U(x_{i+1}, t) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx^2 - N_{i,i+1}''(t) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{B(x)} + U(x_i, t).$$

Разрешив их относительно  $N_{i+1,i+2}''(t)$  и  $N_{i,i+1}''(t)$ , получим

$$N_{i+1,i+2}''(t) = -C_{i,i+1}' [U(x_{i+1}, t) - U(x_i, t)] + C_{i,i+1}' \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx^2; \quad (5)$$

$$-N_{i,i+1}''(t) = C_{i,i+1}' [U(x_{i+1}, t) - U(x_i, t)] - C_{i,i+1}' \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx; \quad (6)$$

где  $C_{i,i+1}' = \left[ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{B(x)} \right]^{-1}$ .

Для системы (B) уравнения колебаний имеют вид

$$m_i'' \ddot{U}(x_i, t) + C_{i,i+1}' [U(x_i, t) - U(x_{i+1}, t)] = N_{i,i+1}''(t); \quad (7)$$

$$m'_{i+1} \ddot{U}(x_{i+1}, t) + c_{i,i+1} [U(x_{i+1}, t) - U(x_i, t)] = -N'_{i,i+1}(t), \quad (8)$$

где точки над  $U(x, t)$  обозначают вторую производную по времени, т.е. ускорение масс.

Приведем уравнения (5) и (6) к виду (7) и (8). Для этого выразим функцию  $U(x, t)$  через перемещения концов участка, воспользовавшись методом Фурье решения уравнения (3) с граничными условиями (4). В этом случае

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) f_n(x),$$

где  $S_n(t)$  - обобщенные координаты;  $f(n)$  - форма  $n$ -го тона свободных продольных колебаний балки с свободными концами. При  $n = 0$ ,  $f_0(x) = 1$  и собственная частота колебаний  $\omega_0 = 0$ .

Ограничившись нулевым и первым тонами колебаний (при соответствующем выборе длины участка), будем иметь

$$U(x, t) = S_0(t) + S_1(t) f_1(x), \quad (9)$$

$$U(x_i, t) = S_0(t) + S_1(t) f_1(x_i), \quad (10)$$

$$U(x_{i+1}, t) = S_0(t) + S_1(t) f_1(x_{i+1}). \quad (11)$$

Если форма 1-го тона колебаний участка известна, то функции  $S_0(t)$  и  $S_1(t)$  можно выразить через перемещения его концов

$$S_1(t) = a_1 [U(x_i, t) - U(x_{i+1}, t)],$$

$$S_0(t) = a_2 U(x_i, t) - a_3 U(x_{i+1}, t),$$

$$a_1 = [f_1(x_i) - f_1(x_{i+1})]^{-1},$$

где  $a_1 = [f_1(x_i) - f_1(x_{i+1})]^{-1}$ ,

$$a_2 = -a_1 f_1'(x_{i+1}),$$

$$a_3 = -a_1 f_1'(x_i).$$

Тогда 
$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \ddot{U}(x_i, t) [a_2 + a_1 f_1'(x)] - \ddot{U}(x_{i+1}, t) [a_3 + a_1 f_1'(x)]. \quad (12)$$

Подставив (12) в (5)-(6) и введя дополнительные обозначения, получим следующие уравнения, описывающие колебания системы (A) (с точностью до второго тона колебаний):

$$M_i'' \ddot{U}(x, t) + c_{i,i+1}' [U(x, t) - U(x_{i+1}, t)] + d_{i,i+1}'' \ddot{U}(x_{i+1}, t) = N_{i,i+1}'(t), \quad (13)$$

$$M_{i+1}' \ddot{U}(x_{i+1}, t) + c_{i,i+1}' [U(x_{i+1}, t) - U(x, t)] + d_{i,i+1}' \ddot{U}(x, t) = -N_{i,i+1}'(t), \quad (14)$$

где обозначены

$$M_i'' = a_1 c_{i,i+1}' \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^x m(x) [f_1'(x) - f_1'(x_{i+1})] dx^2; \quad (15)$$

$$d_{i,i+1}'' = a_1 c_{i,i+1}' \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{B(x)} \int_{x_i}^x m(x) [f_1'(x) - f_1'(x)] dx^2; \quad (16)$$

$$M_{i+1}' = -d_{i,i+1}'' - a_3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) dx, \quad (17)$$

$$d_{i,i+1}' = -M_i'' + a_3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) dx. \quad (18)$$

Коэффициенты  $M$  и  $d$  имеют размерность массы, а их сумма равна полной массе участка, т.е.

$$M_i'' + M_{i+1}' + d_{i,i+1}'' + d_{i,i+1}' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(x) dx.$$

Из сравнения уравнений (I3-I4) с (7-8) видно, что реакция вивалентной системы (B) на внешние силы будет такой же, как у прерывной системы (A), если значения сосредоточенных масс и жесткость пружины вычислять по формулам  $m_i^* = M_i^*$  и  $m_{i+1}^* = M_{i+1}^*$ ;  $c_{i,i+1} = C_{i,i+1}$ . При этом в процессе моделирования необходимо учитывать перекрестные инерционные связи, т.е. моделировать уравнения (I3-I4). Чтобы получить полную систему уравнений колебаний дискретного аналога ЛА, сделаем следующие операции: запишем аналогично (I3-I4) уравнения движения участка корпуса между сечениями  $x_{i-1}$  и  $x_i$ :

$$M_{i-1}^* \ddot{U}(x_{i-1}, t) + C_{i-1,i} [U(x_{i-1}, t) - U(x_i, t)] + \alpha_{i-1,i}^* \ddot{U}(x_i, t) = N_{i-1}^* \rho(t) \quad (19)$$

$$M_i^* \ddot{U}(x_i, t) + C_{i,i+1} [U(x_i, t) - U(x_{i+1}, t)] + \alpha_{i,i+1}^* \ddot{U}(x_{i+1}, t) = N_{i,i+1}^* \rho(t)$$

Предполагая сначала, что в месте стыка участков (в сечении  $x_i$ ) приложены внешние для ЛА силы и не подвешены сосредоточенные грузы, будем иметь равенство

$$N_{i-1,i}^* = N_{i,i+1}^* \quad (20)$$

как для внутренних сил в корпусе ЛА.

Сложив (I4) с (I9) и учтя (20), получим в окончательном виде уравнение движения  $i$ -ой сосредоточенной массы (расположенной в сечении  $x_i$ ) эквивалентной дискретной системы:

$$m_i \ddot{U}(x_i, t) + \alpha_{i-1,i}^* \ddot{U}(x_{i-1}, t) + \alpha_{i,i+1}^* \ddot{U}(x_{i+1}, t) + C_{i-1,i} [U(x_{i-1}, t) - U(x_i, t)] + C_{i,i+1} [U(x_i, t) - U(x_{i+1}, t)] = 0, \quad (21)$$

где  $m_i = m_i^* + m_i^{**}$ , а остальные коэффициенты определены выше.

Уравнениями вида (21) описываются колебания любых сечений корпуса ЛА, кроме конечных. Движение носика ЛА описывается уравнением (I3) при  $i = 1$ , например, и  $N_{i-1}^*(t) = 0$ , а движение допного звена - уравнением (I4) при  $N_{i,i+1}^*(t) = 0$  и  $N_{i-1,i+2}^*(t) = 0$ . Если в сечении  $x_i$  приложена внешняя сила  $P_i(t)$ , то она должна быть записана в правой части уравнения (21). Если в этом же сечении под-

вешены сосредоточенный груз с массой  $m_j$ , то в (21) должна быть добавлена дополнительная упругая сила. В этом случае колебания сечения будут описываться уравнением вида

$$m_j \ddot{u}(x, t) + \dots + c_{1, x} [u(x, t) - u_0(x)] = P(t) \quad (22)$$

Комплекс уравнений вида (22) и (2) полностью определяет возмущенное продольное движение  $u(x, t)$ .

Выражения для расчета коэффициентов уравнений (21) и (22) принимают исключительно простой вид, если эпюры погонных масс и жесткостей по длине выбранного участка постоянны (или практически постоянны). В этом случае форма колебаний первого тона имеет вид

$$u(x, t) = C \sin \frac{\pi x}{2L} \cos \omega t$$

Подставив его в (15-18), получим ..

$$c_{1, x} = 0,15 m_j \omega^2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (23)$$

$$m_1 = 0,35 \left[ m \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left( \frac{x_1}{L} \right)^2 + m_j \cdot \left( \frac{x_1}{L} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$c_{1, x} = 0,15 \cdot m_j \cdot \left( \frac{x_1}{L} \right)^2 \quad (25)$$

Жесткость пружины при этом равна

$$c_{1, x} = \frac{c_{1, x}}{\left( \frac{x_1}{L} \right)^2} \quad (26^a)$$

Как видно из (23-26), параметры дискретной системы являются функциями значений масс и жесткостей в середине участков разбиения



Максимально допустимые с точки зрения точности моделирования длины участков можно определить, исходя из требований выполнения приближенных равенств (9-II). Последние будут справедливы, если максимальная частота спектра возмущений  $\omega_{max}$  значительно меньше собственной частоты второго тона колебаний участка как свободной балки, то есть

$$\omega_{max} \ll \omega_1, \quad \omega_{max} \ll \omega_2.$$

Как известно

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{B_0}{m_0 l}}, \quad (27)$$

где  $B_0$  и  $m_0$  - значения эппр жесткости и массы на участке (постоянны по длине).

Достаточная точность моделирования получается при условии

$$\omega_1 = (2-5) \omega_{max}. \quad (28)$$

При этом  $S_2(t)$  будет величиной второго порядка малости по сравнению с  $S_0(t)$  и первого - по сравнению с  $S_1(t)$ . Из (27) при  $n=1$  с учетом (28) получаем ограничение сверху для длины участка разбиения:

$$l_{max} = \frac{B_0}{(6-10)^2 m_0 \lambda_{max}^2}$$

где  $\lambda_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$  частота в гц.

В заключение заметим, что сходимость предложенного метода дискретизации системы и ее моделирования обеспечивается сходимостью примененного метода Фурье. Статистическое исследование такой модели весьма просто, т.к. конкретные реализации коэффициентов легко вычисляются по формулам (23-26) при известных законах распределения вероятностей эппр  $m(x)$  и  $B(x)$ .

#### Литература

1. Балабух Л.И. и др. Основы строительной механики ракет. Высшая школа, 1969.