3. Miller R.G. The jackknife. – A review // Biometrika. – 1974. – 61. – pp. 1-15.

4. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа //Сб. статей. /Пер. с англ. под ред. Ю.П.Адлера. М.: Финансы и статистика. 1988. 264 с.

УДК 519.722

Д.Б.Аратский, Е.А.Солдатов, В.Р.Фидельман

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

(г. Горький)

Современное спектральное оценивание является мощным средством исследования статистической структуры случайных процессов. Известно, что одной из наиболее информативных характеристик случайного процесса является спектральная плотность мощности (СПМ) /1/. Во многих прикладных задачах научных исследований приходится иметь дело со спектральной обработкой негауссовых случайных процессов, поскольку к ним можно отнести любой квазипериодический сигнал, а также самоизлучающиеся сигналы сложных механических систем /2/. При этом априорная информация о процессе представляет собой набор отсчетов автокорреляционной функции (АКФ) и отличных от нуля высших моментных функций (ВМФ). Поскольку для полного статистического описания и изучения спектрального состава негауссова случайного процесса требуется знание бесконечного ряда его моментных функций, а на практике доступным измерению оказывается всегда их конечное число, имеющиеся данные являются принципиально неполными.

Пусть априорная информация представляет собой конечный набор отсчетов АКФ и ВМФ случайного стационарного негауссова процесса. Требуется на основе этой заведомо неполной информации построить достоверную оценку СПМ высокого разрешения, которая обеспечивала бы исчерпывающее для имеющегося объема данных описание спектрального состава процесса.

Традиционный подход к решению этой задачи основан на применении преобразования Фурье. При этом для заданного набора кумулянтных функций негауссова процесса, однозначно связанных с его ВМФ/3/, $\varkappa_1(\tau_1), \varkappa_2(\tau_1,\tau_2),\ldots,\varkappa_N(\tau_1,\ldots,\tau_N)$, строится соответствующий ряд спектров высших порядков (полиспектров) $S_1(\omega_1), S_2(\omega_1,\omega_2),\ldots,S_N(\omega_1,\ldots,\omega_N)$; спектр N -го порядка представляет собой N-мерное преобразование Фурье от соответствующего кумулянта /3/. При таком подходе к учету априорной информации для полного с точки зрения имеющихся данных описания процесса требуется построение всего набора полиспектров. Важно отметить, что описанному методу спектрального анализа присущи все принципиальные ограничения, связанные с применением процедуры Фурье /I, 2/. Кроме того, встает вопрос интерпретации полученной информации в смысле построения спектра как распределения энергии сигнала по частотам.

Предлагается конструктивный подход к задаче спектрального описания негауссовых случайных процессов, основанный на введении нового определения спектра и позволяющий в явном виде учесть непосредственно в спектре информацию о статистической структуре исследуемого процесса.

Ранее было получено /4/, что спектральную плотность мощности случайного процесса можно определить в виде

$$S(\omega)=\left|\int_0^\infty A\rho(A,\omega)dA\right|^2, \tag{I}$$

где A - амплитуда сигнала, представленного в аналитической форме,

$$X(t)=A(t)e^{i\omega t}, \tag{2}$$

а $\rho(A,\omega)$ - его плотность распределения вероятности (ПРВ). Если бы удалось построить в явном виде вероятностное распределение негауссова случайного процесса, содержащее информацию о его высших статистических связях, то это позволило бы учесть эту информацию и в спектре процесса исходя из определения (I).

Принцип максимальной энтропии (МЭ) является одним из фундаментальных утверждений теории информации. Сформулированный в наиболее краткой форме Джеймсом /5/ применительно к вероятностному распределению $\rho(\vec{X})$ этот принцип гласит: "Если мы делаем какие-либо выводы на основе заведомо неполной априорной информации, то должны опираться при этом на такое распределение вероятности, которое, с одной стороны, обладало бы максимальной энтропией, а с другой стороны, удовлетворяло бы нашим априорным данным".

С точки зрения теории информации этот подход эквивалентен оптимальному учету содержащейся в данных информации и игнорированию тех соображений, для которых нет места в этих данных. В вероятностном смысле принцип МЭ представляет собой метод статистического выбора из всего набора возможных решений решения, реализуемого наибольшим числом способов.

Математическое содержание метода МЭ состоит в оптимизации функционала информационной энтропии в форме Шеннона /5/

$$H=-\int \rho(\vec{X})\ln\rho(\vec{X})d\vec{X}, \tag{3}$$

с линейными ограничениями, представляющими собой априорные данные и учтенными с помощью аппарата множителей Лангранжа.

Пусть априорная информация о случайном стационарном негауссовом процессе ограничена набором отличных от нуля отсчетов АКФ и ВМФ процесса:

$$\begin{cases} m_2(\tau_1)=\int X(t)X^*(t+\tau_1)\rho(\vec{X})d\vec{X},\ \tau_1=\overline{1,M_1}, \\ m_3(\tau_1,\tau_2)=\int X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)\rho(\vec{X})d\vec{X},\ \tau_2=\overline{1,M_2} \\ \vdots \\ m_N(\tau_1,\ldots,\tau_{N-1})=\int X(t)X(t+\tau_1)\ldots X(t+\tau_{N-1})\rho(\vec{X})d\vec{X},\ \tau_{N-1}=\overline{1,M_{N-1}} \end{cases} \tag{4}$$

Варьируя функционал (3) с ограничениями (4), получим выражение для вероятностного распределения негауссова случайного процесса с максимальной энтропией в аналитическом виде

$$\rho(X_1,\ldots,X_{N-1})=\exp\Big\{-\sum_{m_1}\sum_{m_2}\Lambda^{\circledR}_{m_1 m_2}X_{m_1}X^*_{m_2}-\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\Lambda^{\circledR}_{m_1 m_2 m_3} X_{m_1}X_{m_2}X_{m_3}-\ldots-\sum_{m_1}\sum_{m_{N-1}}\Lambda_{m_1,\ldots,m_{N-1}}X_{m_1},\ldots,X_{m_{N-1}}\Big\}. \tag{5}$$

Для определения неизвестных множителей Лангранжа $\Lambda^{\circledR}$, стоящих в $k+1$ -мерных формах в выражении (5), необходимо решить систему нелинейных уравнений относительно $\Lambda^{\circledR}$, получающуюся после подстановки выражения (5) в условии (4). Обычно она решается каким-либо итерационным методом /6/. Особо следует отметить, что из-за выпуклости функционала (3) полученное решение (5) будет единственным.

Решив задачу определения плотности распределения вероятности методом МЭ, мы тем самым получаем возможность построить оценку СПМ негауссова случайного процесса на основании нового определения спектра (I). Легко показать, при условии, если сигнал $X(t)$ представить в аналитической форме (2), что вероятностные распределения $\rho(\vec{X})$ и $\rho(A,\omega)$ оказываются связанными простым соотношением

$$\rho(\vec{X}) = K\rho(A,\omega), \tag{6}$$

где K – постоянный коэффициент.

Таким образом, используя соотношение (6) и выражение (5) и подставляя в них формулу (2) в дискретном виде $X_m = A_m\, exp2\pi i\omega m$, получаем

$$\rho(A,\omega) = exp\Big\{-A^2\Big(\sum_{m_1}\sum_{m_2}\Lambda_{m_1 m_2}\, exp\, 2\pi i\omega(m_1+m_2) - \ldots - \sum_{m_1}\cdots\sum_{m_{N-1}}\Lambda_{m_1\ldots m_{N-1}}\, exp\, 2\pi i\omega(m_1+\ldots+m_{N-1})\Big)\Big\}. \tag{7}$$

Подставив это выражение в определение спектра (I), мы тем самым получим оценку СПМ негауссова процесса.

Такой подход, как это видно из сказанного, позволяет непосредственно в спектре учесть всю имеющуюся априорную информацию о процессе, обеспечивая исчерпывающее статистическое и спектральное описание негауссова процесса. При этом в явном виде проявляется вклад высших статистических связей в распределение энергии процесса по частотам. Кроме того, предложенный подход, основанный на построении ПРВ случайного процесса по методу МЭ и последующем вычислении оценки СПМ исходя из нового определения спектра, вообще является универсальной схемой решения одномерных и многомерных задач спектрального оценивания случайных процессов любой статистической структуры. Например, если процесс задан лишь отсчетами его АКФ, применение этой методики приводит к аналитическому выражению для одномерной и многомерной оценок спектральной плотности мощности /6, 7/.

Если же исследуемый процесс является негауссовым, то в общем случае процедура построения решения носит итерационный характер: сначала необходимо решить систему нелинейных уравнений на определение множителей Лагранжа Λ, затем численными методами взять интеграл (I).

Однако в некоторых частных случаях удается получить оценку СПМ негауссова процесса в аналитическом виде. В качестве примера рассмотрим случайный процесс, информация о котором ограничена набором моментных функций второго (АКФ) и четвертого порядков $m_2(\tau_1)$, $m_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$. Тогда вероятностное распределение (7) примет вид

$$P(A,\omega)=exp\left\{-A^2a(\omega)-A^2 b(\omega)\right\}, \tag{8}$$

где введены обозначения

$$a(\omega)=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\Lambda^{(m_2)}_{n_1,n_2}\,exp\,2\pi i\omega(n_1-n_2), \tag{9}$$

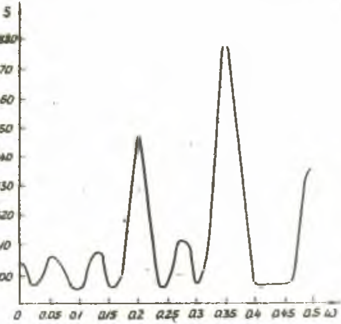
$$b(\omega)=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\sum_{n_4}\Lambda^{(m_4)}_{n_1n_2n_3n_4}\,exp\,2\pi i\omega(n_1+n_2+n_3+n_4). \tag{10}$$

Подставляя выражение (8) в определение (I) и вычисляя интеграл, нетрудно получить оценку СПМ негауссова процесса с отличными от нуля m_2 и m_4 :

$$S(\omega)=\frac{\pi}{64b(\omega)}e^{\frac{a^2(\omega)}{2b(\omega)}}. \tag{11}$$

Было проведено численное моделирование с целью анализа возможностей предложенного метода. Рассматривался негауссов модельный случайный процесс, представляющий собой сумму двух синусоид на фиксированных частотах ω_1 = 0,2, ω_2 = 0,35 с весами $a_1=a_2=$ = I,0 и негауссова шума, обладающего экспоненциальным распределением, отсчеты которого генерировались по известному алгоритму Монте-Карло /8/ $X=\frac{1}{A}\,ln(1-\gamma)$, где γ – случайное число из датчика равномерно распределенных чисел, а параметр A = I.

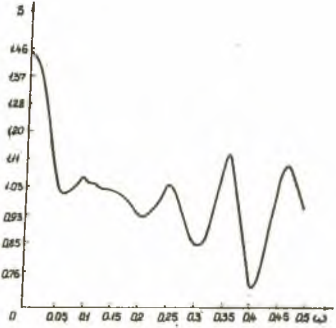
На основе полученного таким образом временного ряда формировались N = I2 отсчетов АКФ и M = 6 отсчетов четвертой моментной функции вида $m_4(0,0,\tau)$, выбранной для упрощения численных расчетов. На рис. I изображена оценка СПМ описанного процесса (в логарифмическом масштабе), вычисленная по формуле (II); для построения соответствующего вероятностного распределения по методу Хука-Дживса потребовалось I5 итераций. Спектр отражает острую форму спектральных линий на частотах синусоид, их точное соответствие по положению теоретическим частотам, отчетливое выделение в



Р и с. I. Оценка СПМ (спектральной плотности мощности) негауссового модельного случайного процесса (в логарифмическом масштабе)

спектре характерных частот негауссова шума, порожденных его АКФ, и особенностей, обусловленных четвертой моментной функцией (для сравнения на рис. 2 представлен спектр негауссова шума, построенный только на основе N = I2 отсчетов АКФ по описанной методике /4/).

В целом численное моделирование показало, что новый метод построения оценок СПМ негауссова процесса позволяет обнаруживать в спектре такого сложного процесса, как сумма синусоид и сильного (сравнимого по амплитуде с сигналом) негауссова шума, основные гар-



Р и с. 2. Спектр негауссова шума

монические составляющие, замаскированные спектральными максимумами, порожденными высшими статистиками процесса.

Таким образом, описанная схема построения спектральных оценок негауссовых случайных процессов на основе нового определения спектра представляет собой проявление единого конструктивного подхода к спектральному оцениванию случайных процессов произвольной статистической структуры, а применение принципа МЭ к построению ПРВ процесса, используемого при расчете спектров, обеспечивает оптимальный с точки зрения теории информации механизм извлечения информации из априорных данных.

Библиографический список

I. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального оценивания //ТИИЭР. I98I. Т. 69. № II. С. 5-5I.

2. Никиас Х.Л., Рагувер М.Р. Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов //ТИИЭР. I987. Т. 75. № 7. С. 5-3I.

3. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, I987.

4. Аратский Д.Б., Солдатов Е.А., Фидельман В.Р. О байесовском подходе к вычислению спектров случайных процессов и полей. - Деп. в ВИНИТИ от 22.I0. 87, рег. № 7430-В87.

5. Джейнс Э.Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии //ТИИЭР. I982. Т. 70. № 9. С. 33-5I.

6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, I982. 580 с.

7. Аратский Д.Б., Будников Н.С., Солдатов Е.А., Фидельман В.Р. О многомерном спектральном анализе случайных сигналов методом Байеса. - Деп. в ВИНИТИ от 0I.04.88, рег. № 25I4-В88.

8. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, I975. 63 с.

УДК 533.9.082:62I.3.0I2.6

Л.А.Бахвалов, Н.И.Федунец

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБА ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ФОРМОЙ ИМПУЛЬСА ИЗЛУЧЕНИЯ УСИЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА CO_2 ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ

(г. Москва)

Возможность управления формой импульса излучения в лазерной системе импульсно-периодического действия явится, по-видимому, значительным достоинством в системах связи для осуществления модуляции интенсивности излучения - в технологических задачах, для изменения режима обработки изделий - в исследованиях взаимодействия излучения с веществом. При этом важно, чтобы способ управления был малоинерционным и позволял иметь как можно больший диапазон длительностей и амплитуд импульсов излучения на выходе лазерной системы.