5. Буймов А.Г. К статистике пальмовских полей.- Автометрия. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981, № 6, с.13-18.

УДК 519.9

Л.Г.Седых

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫМИ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

(г.Ленинград)

В настоящее время поверхностные явления и поверхностно-активные вещества (ПАВ) определяют важнейшие технологические процессы и применяются практически во всех отраслях народного хозяйства, поэтому их исследованию уделяется большое внимание. В статье приводится решение задачи синтеза оптимального управления биотехническими процессами, описываемыми уравнениями с частными производными параболического типа, что позволит создавать автоматизированные системы управления биотехнологическими комплексами.

Задача I

Минимизировать $\int_0^T\int_\Omega (L(\xi,t,u)+\gamma u(\xi,t))\,d\xi\,dt$

при условиях:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial t}=D\Delta L-\rho(x,y,z,t,\alpha) \text{ в } \Omega\times(0,T], && (1)\\ &L|_{t=0}=L_0, && (2)\\ &\left.\frac{\partial L}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \end{aligned}\right.$$

$$u\in\mathcal{U}, \qquad (3)$$

где $\frac{\partial L}{\partial n}$ - производная по нормали к $\partial\Omega$ (границе области Ω); $\xi=(x,y,z)$; $\mathcal{U}=\{u:\bar\Omega\to[a,b]\,|\,u\text{- измеримое}\}$, $0<a\leqslant b<+\infty$,

$$\bar\Omega=\begin{cases}\Omega\times(0,T) & \text{, для задачи 1,2,}\\ (0,\ell)\times(0,T) & \text{, для задачи 3,}\\ \Omega & \text{, для задачи 4,5,}\\ (0,\ell) & \text{, для задачи 6.}\end{cases}$$

Задача 2

$$\begin{cases} \text{Минимизировать } \int_0^T \int_\Omega (\alpha(\xi,t,u)+\gamma u(\xi,t))\,d\xi\,dt \\ \text{при условиях (I), (2)} \\ \alpha|_{\partial\Omega}=0, \\ u\in\mathcal{U}. \end{cases} \qquad (4)$$

Задача 3

$$\begin{cases} \text{Минимизировать } \int_0^T \int_0^\ell (\alpha(x,t,u)+\gamma u(x,t))\,dx\,dt \\ \text{при условиях:} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t}=D\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-v\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\rho(x,t,\alpha) \text{ в } (0,\ell)\times(0,T). \\ \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{v}{D}(\alpha|_{x=0}-\bar{\alpha}),\ \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0,\ u\in\mathcal{U}, \\ \text{где } v=q/S. \end{cases}$$

Большой интерес представляет изучение стационарных состояний.

Задача 4

$$\begin{cases} \text{Минимизировать } \int_\Omega (\alpha(\xi,u)+\gamma u(\xi))\,d\xi \\ \text{при условиях:} \\ -D\Delta\alpha+\rho(x,y,z,\alpha)=0 \text{ в } \Omega \\ \alpha/\partial\Omega=0;\ u\in\mathcal{U}. \end{cases} \qquad (5)$$

Задача 5

Минимизировать $\int_\Omega (\alpha(\xi,u)+\gamma u(\xi))\,d\xi$

при условиях: $(5), (3), u\in\mathcal{U}.$

Задача 6

Минимизировать $\int_0^\ell (\alpha(\xi,u)+\gamma u(\xi))\,d\xi$ при условиях:

$$-D\frac{d^2\alpha}{dx^2}+v\frac{d\alpha}{dx}+\rho(x,\alpha)=0, \qquad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{v}{D}(\alpha|_{x=0}-\bar{\alpha}),\ \frac{d\alpha}{dx}\Big|_{x=\ell}=0. \qquad (7)$$

Смысл обозначений может быть, например, такой: $\alpha(x,y,z,t)$ - концентрация реагента в реакторе в точке (x, y, z) в момент времени t ; α_0 - начальная концентрация реагента; $\rho(\alpha)$ - скорость биохимического превращения; $\bar{\alpha}$ - концентрация реагента на входе в реактор ; D - коэффициент диффузии; Ω - область (реактор), $\Omega\in R^3$;
q - расход стоков, поступающих в реактор; ℓ - длина реактора;
S - поперечное сечение реактора; γ - экономический показатель;
u - управляющий параметр.

Остановимся на исследовании наиболее часто встречающегося случая – биохимических реакций нулевого и первого порядка. В связи с тем, что управляющий параметр u является измеримой функцией, решение поставленных задач необходимо понимать в обобщенном смысле.

Определение I. Функцию $\mathcal{L}(u)$ будем называть обобщенным решением задачи (I)-(8), соответствующим управлению $u \in \mathcal{U}$, если выполняются соотношения:

$$\mathcal{L}(u) \in \mathcal{L}^{\infty}(0,T; H_0^1(\Omega));$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}, u\right) + C(\mathcal{L}, w) + (\rho(\mathcal{L}; u), w) = 0;$$

для любых $w \in H_0^1(\Omega), t \in (0,T)$;

$$\mathcal{L}(u)\Big|_{t=0} = \mathcal{L}_0, \text{ где } \mathcal{L}_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Определение 2. Функцию $\mathcal{L}(u)$ будем называть обобщенным решением задачи (6), (7), соответствующим управлению $u \in \mathcal{U}$, если выполняются соотношения:

$$\mathcal{L}(u) \in H^1(0,\ell);$$

$$C\langle \mathcal{L}, w\rangle + \langle \rho(\mathcal{L}, u), w\rangle + v(\mathcal{L}|_{x=0} - \bar{\mathcal{L}})\, w|_{x=0} = 0;$$

для любых $w \in H^1(0,\ell)$;

где $C(f_1, g_1) = D\int_\Omega \left[\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial x}\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x} + \frac{\partial f(\xi)}{\partial y}\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial y} + \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial z}\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial z}\right] d\xi$,

для любых $f, g_1 \in H^1(\Omega)$, где $\xi = (x, y, z)$

$C\langle f_2, g_2\rangle = D\int_0^{\ell}\frac{d}{dx}f_2(x)\frac{d}{dx}g_2(x)dx$, для любых $f_2, g_2 \in H^1(0,\ell)$.

Получим справедливость следующего утверждения из литературы /I/.

Теорема I. Все поставленные выше задачи при любом допустимом управлении $\mathcal{U}$ имеют единственное решение.

Теорема 2. Пусть u^* оптимальное управление задачи I в случае $\rho(\xi, t, \mathcal{L}, u) = \rho(\xi, t, u)$, тогда

$$P(\xi_0, t_0)\rho(\xi_0, t_0; u^*(\xi_0, t_0)) + \gamma u^*(\xi_0, t_0) = \inf_{\kappa \in [a,b]} (\rho(\xi_0, t_0; \kappa)P(\xi_0, t_0) + \gamma\kappa),$$

где P – обозначает сопряженное состояние; $(\xi_0, t_0) \in \Omega \times (0,T)$.

Теорема позволяет, зная конкретный вид зависимости скорости биохимического превращения от управляющего параметра, синтезировать управление u^*.

Рассмотрим случай, когда биохимические реакции имеют первый порядок. Замечание:

$$\iint\limits_{R_j} |\alpha(\xi,t,u(j))-\alpha(\xi,t,u^*))(\rho(\xi,t;u(j))-$$
$$-\rho(\xi,t\,;\,u^*(\xi,t)))P(\xi,t;u^*)|d\xi dt \leq C(mes\,R_j)^{5/2},$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от R_j, R_j - куб, содержащийся в цилиндре $\Omega\times(0,T)$ с центром в точке (ξ_0,t_0),

$$u(j)=(1-\chi_j)u+K\chi_j,\quad K\in[a,b];\quad j\in N;$$

χ_j - характеристическая функция множества R_j.

Теорема 3. Пусть u^* оптимальное управление задачи I в случае $\rho(\xi,t,\alpha;u)=\rho(\xi,t,u)\alpha$, тогда

$$\alpha(\xi_0,t_0;u^*)P(\xi_0,t_0;u^*)\rho(\xi_0,t_0;u^*(\xi_0,t_0))+\gamma u^*(\xi_0,t_0)=$$
$$=\inf_{K\in[a,b]}\{\alpha(\xi_0,t_0;u^*)P(\xi_0,t_0;u^*)\rho(\xi_0,t_0,K)+\gamma K\}.$$

Перейдем к исследованию задачи 6 в случае, когда биохимические реакции имеют нулевой порядок.

Теорема 4. Пусть u^* оптимальное управление задачи 6, тогда

$$\gamma u^*(x_0)+\rho(x_0;u^*(x_0))\left(\frac{1}{2D}x_0^2-\frac{\ell}{D}x_0-\frac{\ell}{v}\right)=$$
$$=\inf_{K\in[a,b]}\left\{\gamma K+\rho(x_0,K)\left(\frac{1}{2D}x_0^2-\frac{\ell}{D}x_0-\frac{\ell}{v}\right)\right\}.$$

Завершим работу исследованием задачи 6 в случае, когда биохимические реакции имеют первый порядок.

Теорема 5. Пусть u^* оптимальное управление задачи 6, тогда

$$\rho(x_0;u^*(x_0))\alpha(x_0;u^*)P(x_0;u^*)+\gamma u^*(x_0)=$$
$$=\inf_{K\in[a,b]}\{\rho(x_0,K)\alpha(x_0;u^*)P(x_0,u^*)+\gamma K\},$$

где $$p(x,u)=\frac{1}{D}\int_0^x\int_0^s\rho(v,u(v))p(v,u)dv\,ds+$$
$$+\frac{1}{2D}x^2-\frac{1}{D}\left(x+\frac{D-v}{D}\right)\int_0^{\ell}\rho(v,u(v))P(v,u)dv,$$

которое при любом $u\in\mathcal{U}$ решается методом последовательных итераций.

Одним из важных биотехнологических процессов является биологическая очистка сточных вод активным илом. Модели типа Моно не учитывают того, что одновременно с процессом биоокисления в системе с активным илом протекают процессы сорбции, причем в некоторых случаях скорость изъятия загрязнений за счет сорбции может намного превышать скорость биоокисления /2/. Практически важно найти такой режим работы системы, чтобы за время ее функционирования на хлопьях активного ила сорбировало максимально возможное количество загрязнений.

Задача 7.

Максимизировать $\int_0^T \int_\Omega x(t,\mu,u)\,d\mu\,dt$

при условиях:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \gamma(u)(y-x) + \sigma(u)x = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \gamma(u)(y-x) = 0, \qquad \text{в } (0,T\times\Omega),$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0$$

и граничным условием $\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$,

где x, y - концентрации сорбированных и несорбированных загрязнений на хлопьях активного ила; x_0, y_0 - начальные концентрации сорбированных и несорбированных загрязнений; $\gamma(u)$, $\sigma(u)$ - коэффициенты скорости процессов сорбции и биохимического окисления, соответственно;

$$\gamma, \sigma \in C^1[a,b], \; 0 < a \leqslant b < +\infty, \; 0 < \gamma_* \leqslant \gamma(u) \leqslant \gamma^* < +\infty,$$
$$0 < \sigma(u) \leqslant \sigma^*, \; \forall u \in \mathcal{U};$$

$\mathcal{U} = \{a : (0,T)\times\Omega \to [a,b] \;/\; u$ - измеримое $\}$; Ω - область с достаточно регулярной границей в $\mathbb{R}^3$; $\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ - производная по нормали к границе области Ω.

В связи с тем, что $u \in \mathcal{U}$, решение поставленной задачи необходимо понимать в обобщенном смысле.

Определение 3. Пара функций $x(u)$, $y(u)$ называется обобщенным решением поставленной задачи, соответствующим допустимому управлению $u \in \mathcal{U}$, если выполняются соотношения:

$$x(u) \in \mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), \; y(u) \in \mathcal{L}^\infty(0,T;H^1(\Omega));$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}x(u), w_1\right) - (\gamma(u)(y(u)-x(u)), w_1) = 0, \; \forall w_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}y(u), w_2\right) + C(y(u), w_2) + (\sigma(u)y(u), w_2) +$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}x(u), w_2\right) = 0, \; \forall w_1 \in H^1(\Omega);$$

$$x|_{t=0} = x_0, \; y|_{t=0} = y_0,$$

где $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ - скалярное произведение в $\mathcal{L}^2(\Omega)$, т.е.

$$(f,g)=\int_\Omega f(\mu)g(\mu)d\mu \qquad \forall f,\ g\in\mathcal{L}^2(\Omega);$$

$$c(f,g)=\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial\mu_i}f(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu_i}g(\mu)\,d\mu,$$

$$\forall f,g\in H^1(\Omega),\ \mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3);\ x_0\in\mathcal{L}^2(\Omega),\ y_0\in H_0^1(\Omega).$$

Теорема 6. При любом допустимом управлении $u\in\mathcal{U}$ поставленная задача имеет единственное решение. В работе для поставленной задачи получены необходимые условия оптимальности.

Теорема 7. Пусть u^* оптимальное управление поставленной задачи, тогда

$$\max_{\kappa\in[a,b]}\left[(P_1(t_0,\mu_0,u^*)-P_2(t_0,\mu_0,u^*))(y(t_0,\mu_0,u^*)-x(t_0,\mu_0,u^*))\gamma(\kappa)+\right.$$
$$\left.+\delta(\kappa)y(t_0,\mu_0,u^*)P(t_0,\mu_0,u^*)\right]=(P_1(t_0,\mu_0,u^*)-P_2(t_0,\mu_0,$$
$$u^*))(y(t_0,\mu_0,u^*)-x(t_0,\mu_0,u^*))\gamma(u^*(t_0,\mu_0))+$$
$$+\delta(u^*(t_0,\mu_0))y(t_0,\mu_0;u^*)P_2(t_0,\mu_0,u^*),$$

где P_1, P_2 - обозначают сопряженные состояния;
(t_0,μ_0) - точка $(0,T)\times\Omega$.

Литература

I. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.:Наука, 1967. - 736 с.

2. Вавилин В.А., Васильев В.Б. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод активным илом. - М.: Наука, 1979. - II7 с.

УДК 62.505

В.А.Бурдастых, К.В.Исаев

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В АСНИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(г. Ростов-на-Дону)

Одна из основных особенностей сложных научных экспериментов