5. Джури Д. Инноры и устойчивость динамических систем. - М.: Наука, 1979. - 299 с.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1966. - 576 с.

7. Алексеев А.С., Макарычева Д.Н., Чубаров М.А. Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ //Теория устойчивости и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1979. - С. 229-239.

8. Чубаров М.А. Проблема Рауса-Гурвица и последовательности полиномиальных остатков //Динамика систем. - Горький:Изд.ГГУ, 1974. - Вып. 2. - С. 135-163.

УДК 519.6

Ю.М.Агеев, Е.А.Кочегурова

РЕКУРРЕНТНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

(г. Томск)

Для большого круга задач обработки измерительной информации реальные сигналы на выходах измерительных устройств могут быть с достаточной степенью точности представлены полиномами. Это вызывает необходимость изучения использования полиномиальных фильтров в задачах автоматизированной обработки экспериментальных данных.Здесь рассматривается задача рекуррентного восстановления дискретизированных сигналов. При этом предполагается, что измеренные значения $f(x_j)=u(x_j)+\xi(x_j)$, где $u(x_j)$ - полезный низкочастотный сигнал, $\xi(x_j)$- широкополосная помеха, x_j - дискретные моменты времени. В качестве восстанавливающей функции выбран рекуррентный сглаживающий полиномиальный сплайн третьего порядка.

Алгоритм построения сглаживающего сплайна (СС) основан на использовании условия сопряжения сплайна и минимизации выражения

$$J=(1-\rho)h^2\int_{x_i}^{x_{i+n}}[S''(x)]^2dx+\rho\sum_{j=i}^{i+n}[S(x_j)-f(x_j)]^2, \qquad (1)$$

где ρ - весовый множитель;

$h = x_{i+n} - x_i$ – длина звена сплайна, в дальнейшем называемая шаблоном, здесь предполагается $h = const$;

$S''(x)$ – вторая производная СС.

Рассмотрим алгоритм построения СС для i -го звена:

$$S^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x-x_i) + a_2^{(i)}(x-x_i)^2 + a_3^{(i)}(x-x_i)^3 \qquad (2)$$

для всех $x \in [x_i, x_{i+n}]$.

Используя условия сопряжения СС и его производных в левом узле сплайна, имеем

$$\begin{aligned} a_0^{(i)} &= a_0^{(i-1)} + a_1^{(i-1)} h + a_2^{(i-1)} h^2 + a_3^{(i-1)} h^3; \\ a_1^{(i)} &= a_1^{(i-1)} + 2a_2^{(i-1)} h + 3a_3^{(i-1)} h^2; \qquad (3) \\ a_2^{(i)} &= 2a_2^{(i-1)} + 6a_3^{(i-1)} h. \end{aligned}$$

Предполагается, что для дефекта $D=1$ используются все уравнения системы (3), для дефекта $D=2$ – два первых.

Недостающие в системе (3) коэффициенты СС определяют, минимизируя функционал (I). При $D=1$ коэффициент $a_3^{(i)}$ определяется из условия

$$\frac{\partial J}{\partial a_3^{(i)}} = 0.$$

При $D=2$ неизвестные коэффициенты $a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$ определяются из условия

$$\frac{\partial J}{\partial a_2^{(i)}} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a_3^{(i)}} = 0.$$

Таким образом, для $D=1$ полная система уравнений для определения коэффициентов СС на i -м звене имеет вид

$$\begin{aligned} a_0^{(i)} &= a_0^{(i-1)} + a_1^{(i-1)} h + a_2^{(i-1)} h^2 + a_3^{(i-1)} h^3; \\ a_1^{(i)} &= a_1^{(i-1)} + 2a_2^{(i-1)} h + 3a_3^{(i-1)} h^2; \\ a_2^{(i)} &= 2a_2^{(i-1)} + 6a_3^{(i-1)} h; \qquad (4) \\ a_3^{(i)} &= \frac{\rho F3 - A a_2^{(i)}}{C}. \end{aligned}$$

Для $D=2$

$$a_0^{(i)} = a_0^{(i-1)} + a_1^{(i-1)} h + a_2^{(i-1)} h^2 + a_3^{(i-1)} h^3;$$
$$a_1^{(i)} = a_1^{(i-1)} + 2a_2^{(i-1)} h + 3a_3^{(i-1)} h^2;$$
$$a_2^{(i)} = \frac{\rho(F2C - F3A)}{BC - A^2}; \qquad (5)$$
$$a_3^{(i)} = \frac{\rho(F3B - F2A)}{BC - A^2}.$$

В системах (4), (5) приняты обозначения

$$A = (1-\rho)6h^4 + \rho H5;$$
$$B = (1-\rho)4h^3 + \rho H4;$$
$$C = (1-\rho)12h^5 + \rho H6;$$
$$H_n = \sum_{j=1}^{i+n} (x_j - x_i)^n;$$
$$FX2 = \sum_{j=i}^{i+n} f(x_j)(x_j - x_i)^2; \qquad FX3 = \sum_{j=i}^{i+n} f(x_j)(x_j - x_i)^3;$$
$$F2 = FX2 - a_0^{(i)} H2 - a_1^{(i)} H3; \quad F3 = FX3 - a_0^{(i)} H3 - a_1^{(i)} H4.$$

Здесь величины $A, B, C, FX2, F2, FX3, F3$ определяются для каждого звена сплайна. Величины Hh - могут быть определены единожды (при фиксированном шаблоне h).

Выражения (2)- (6) представляют собой алгоритм вычисления коэффициентов и значений СС. Особенностью этого алгоритма является его рекуррентность, другой отличительной от известных вычислительных схем /2/ особенностью является использование h -точечного шаблона. Кроме того, функционал (I) включает все значения измеренной функции внутри шаблона, в отличие от базиса, только на узлах сплайна, как это традиционно принято.

Настраиваемыми параметрами алгоритма являются ρ, h . Весовой множитель ρ устанавливает компромисс между двумя противоречивыми слагаемыми (I): первое слагаемое характеризует гладкость СС, второе - близость его к исходной функции. Исследование алгоритма проводилось на модельной кривой третьего порядка, содержащей все характерные точки кривых третьего порядка (минимум, максимум, точку перегиба). Цель исследования состояла в нахождении зависимости от параметров широкополосной помехи оптимальных значений ρ и h.

Варьируемым параметром помехи была выбрана величина среднеквадратического отклонения шума.

Критерием близости восстанавливающей функции $S(x)$ и истинной $u(x)$ является метрика пространства $W_2^2[a,b]$, базисными полиномами которого являются сплайны /3/:

$$d(S,u)=\left\{\sum_{j=0}^{2}\int_a^b\left|S^{(j)}(x)-u^{(j)}(x)\right|^2dx\right\}^{1/2}, \tag{7}$$

где $S^{(j)}, u^{(j)}$ j-я производная сплайна, функции.

В таблице приведены полученные методом случайного поиска оптимальные значения ρ и h в зависимости от среднеквадратического отклонения σ_ξ помехи.

Оптимальные значения	σ_ξ, %				
	0	I	5	I0	20
h	5	5	7	7	7
ρ	0,93	0,89	0,66	0,49	0,4

Экспериментальные исследования показали, что оптимальное значение длины шаблона h не зависит от уровня нормальной помехи. Оптимальное значение ρ существенно зависит от уровня нормальной помехи. Уменьшение ρ при увеличении σ_ξ может быть объяснено ослаблением интерполирующих свойств СС и усилением его сглаживающих свойств, что вытекает из выражения (I).

Описанный алгоритм построения рекуррентного СС позволяет использовать его для решения широкого круга прикладных задач в системах реального времени. В частности, алгоритм был применен для текущего определения момента готовности изделия по измеренным значениям параметра качества изделия, а также в задаче текущего определения точек перегиба кривой титрования.

Библиографический список

I. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функции. - М.: Наука, I980. - 350 с.

2. Гутин Я.Б., Серединский А.В. Рекуррентный алгоритм сглаживающего сплайна //Изв.вузов, сер. Приборостроение, I982. - № 5. - С. 40-43.