

УДК 519.722

Д.Б.Аратский, Е.А.Солдатов, В.Р.Фидельман,
Н.С.Будников

ГИФТИ, Горький

ПРЕЦИЗИОННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СПЕКТРОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННОГО ПОДХОДА

Предлагается конструктивный подход к решению задачи многомерного спектрального оценивания. Вводится новое определение спектра случайного процесса, основанное на использовании его вероятностного распределения в аналитическом виде. Прделан вывод выражения для одномерной спектральной оценки процесса, априорная информация о котором ограничена отсчетами автокорреляции, и проведено обобщение на случай многомерных случайных процессов; при этом для получения распределения вероятности процесса применяется принцип максимальной энтропии и вероятностная формула Байеса. Приводятся результаты численного моделирования, демонстрирующие высокую разрешающую способность описанного метода, отмечена возможность его реализации на современных вычислительно эффективных средствах.

Одним из наиболее эффективных способов обработки и интерпретации информации об изучаемом объекте в автоматизированных системах научных исследований (АСНИ) является нелинейное спектральное

Автоматизация научных исследований. Куйбышев, 1990.

оценивание. В этом случае задача состоит в изучении спектрального состава случайного поля, в общем случае многомерного, априорная информация о котором имеет вид измеренных в эксперименте средних характеристик поля — его автокорреляционных функций (АКФ). В такой постановке формулируется широкий класс реальных физических задач, решение которых сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма I-го рода:

$$R(k) = \int S(\omega) \exp 2\pi i \omega k d\omega, \quad (I)$$

где $R(k)$ — отсчеты априори заданной АКФ процесса, а $S(\omega)$ — искомая спектральная плотность мощности (СПМ).

На практике матрица $R(k)$ оказывается плохо обусловленной и зашумленной, причем из-за ограниченности условий эксперимента обычно известно лишь конечное число ее отсчетов, в силу чего задача построения спектра является принципиально недоопределенной и некорректной.

К числу наиболее важных требований, предъявляемых к используемым в АСНИ методам спектральной обработки информации, относится способность построения надежных оценок спектров высокого разрешения в реальном масштабе времени. При этом особое внимание обращается на возможность реализации вычислительно эффективных алгоритмов на уже созданной элементной базе в виде спецпроцессоров (или спецвычислителей) известной структуры. Наиболее перспективными методами решения некорректно поставленных спектральных задач являются методы, основанные на применении принципа максимальной энтропии (МЭ) [3]. В традиционной постановке задача построения спектров методом МЭ сводится к оптимизации функционала информационной энтропии относительно $S(\omega)$ с линейными ограничениями вида (I). Известно, что в одномерном случае такой подход обеспечивает высокое спектральное разрешение [5]. Кроме того показано, что в одномерном случае оценка СПМ, получаемая по методу МЭ, по форме совпадает с выражением для спектра авторегрессионного процесса [3]. Это позволяет производить прямые аналитические расчеты спектральных оценок МЭ и, более того реализовать их на вычислительно эффективных структурах, созданных на основе современной элементной базы [1]. Однако для многомерного случая такая аналогия места не имеет, и при

использовании метода МЭ возникают серьезные вычислительные трудности принципиального характера.

В настоящей работе предлагается новый вариант применения принципа МЭ в задачах многомерного спектрального анализа, основанный на введении нового определения СПМ случайного процесса, который приводит к аналитическому выражению для спектра высокого разрешения, удобному для реализации на современных вычислительных средствах.

Рассмотрим дискретную выборку из реализации случайного процесса (X_0, X_1, \dots, X_N) . Полным статистическим описанием такого временного ряда является его плотность распределения вероятности (ПРВ) $\rho(X_0, X_1, \dots, X_N)$. Представим сигнал в аналитической форме

$$X(t) = A(t)e^{i\omega t}, \quad (2)$$

которую будем рассматривать как параметрическую замену с параметром ω . Тогда можно получить, что вероятностные распределения $\rho(X_0, X_1, \dots, X_N)$ и $\rho(A, \omega)$ связаны соотношением

$$\rho(X_0, X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{J} \rho(A, \omega), \quad (3)$$

где множитель $1/J$, как это следует из (2), постоянный.

Спектральную плотность мощности случайного процесса (2) можно определить следующим образом:

$$S(\omega) = \left| \int_0^\infty A \rho(A, \omega) dA \right|^2 \quad (4)$$

или в несколько ином виде

$$S(\omega) = \int_0^\infty A^2 \rho(A, \omega) dA. \quad (5)$$

Физический смысл такого определения спектра совершенно ясен и соответствует общепринятому физическому пониманию термина "спектр": это средняя мощность процесса на частоте ω . Таким образом, если бы удалось построить ПРВ процесса $\rho(A, \omega)$ в явной форме, то это было бы адекватно решению задачи классического спектрального оценивания в самой общей постановке: по информации о статистической структуре процесса в виде его ПРВ оценить спектральный состав процесса.

Принцип МЭ, сформулированный в наиболее краткой форме Джейнсом [2], применительно к распределению вероятности $\rho(\vec{X})$, гласит: "Если мы делаем какие-либо выводы на основе заведомо неполной априорной информации о процессе, то должны при этом опираться на такое распределение вероятности, которое, с одной стороны, обладало бы максимальной энтропией, а с другой, удовлетворяло бы нашим априорным данным". Джейнс показал, что в случае, когда априорная информация о процессе представляет собой отсчеты его АКФ, вероятностное распределение, при котором достигается оптимум энтропийного функционала, имеет гауссов вид [2]:

$$\rho(\vec{X}) = \exp \left\{ - \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N G_{m,n}^{(N+1)} X_m X_n^* \right\}, \quad (6)$$

где $G_{m,n}^{(N+1)}$ - матрица размера $(N+1) \times (N+1)$, обратная теплицевой, сформированной из отсчетов АКФ процесса. Поскольку функционал энтропии выпуклый, решение (6) единственно, что снимает вопрос о некорректности задачи.

Рассмотрим выборку из реализации марковского N - порядка, стационарного процесса, заданного $N+1$ отсчетами его АКФ. Чтобы построить плотность распределения вероятности произвольного числа $M > L$ последовательных отсчетов, воспользуемся формулой Байеса

$$\rho(x_0, x_1, \dots, x_{L+1}) = \rho(x_0, \dots, x_L) \left[\frac{\rho(x_{L-N+1}, \dots, x_{L+1})}{\rho(x_{L-N+1}, \dots, x_L)} \right]. \quad (7)$$

Подставляя в стоящую в квадратных скобках дробь выражение для плотности распределения вероятностей в виде (6) для ПРВ $M > L$ отсчетов процесса, нетрудно получить по индукции:

$$\rho(x_0, \dots, x_M) = \rho(x_0, \dots, x_L) \exp \left\{ \sum_{e=0}^{M-N} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N G_{m,n}^{(N+1)} x_{m+e} x_{n+e}^* - \sum_{e=0}^{M-N-1} x_e \times \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{m,n}^{(N)} x_{m+e} x_{n+e}^* \right\}. \quad (8)$$

Осуществляя предельный переход при $M \rightarrow \infty$ (при этом удельный вес слагаемых, стоящих в показателе экспоненты в $\rho(x_0, \dots, x_L)$ будет

невелик) и учитывая формулу (2) в дискретном виде, приходим к выражению для ПФВ случайного процесса, заданного $N+1$ отсчетами АКФ:

$$\rho(A, \omega) = \exp \left\{ -A^2 \left(\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N G_{m,n}^{(N+1)} \exp 2\pi i \omega (m-n) - \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{m,n}^{(N)} \exp 2\pi i \omega (m-n) \right) \right\}. \quad (9)$$

Подставляя это выражение в определение спектра (4) и выполняя интегрирование, получаем выражение для точной оценки СПМ случайного процесса

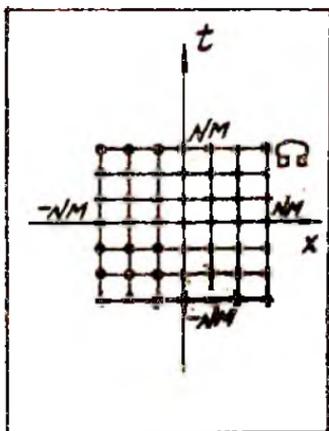
$$S(\omega) = \left[\left| \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N G_{m,n}^{(N+1)} \exp 2\pi i \omega (m-n) - \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{m,n}^{(N)} \exp 2\pi i \omega (m-n) \right| \right]^{-2}. \quad (10)$$

Осуществим строгое обобщение полученной оценки СПМ на многомерный случай. Пусть априорная информация представляет собой набор $N+1$ отсчетов АКФ многомерного (для определенности двумерного) случайного процесса. Такую АКФ можно себе представить как вычисленную в узлах эквидистантной связанной двумерной решетки Ω (рис. 1). Рассмотрим массив H — пар координат узлов положительного по x и t квадранта решетки Ω и упорядочим его в виде матрицы индексов T :

$$T: \begin{vmatrix} H(1) - H(1) & H(1) - H(2) \dots \\ H(2) - H(1) & H(2) - H(2) \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $H(i)$ — i -я пара координат некоторого узла решетки Ω , входящая в H .

В силу наложенных на Ω условий каждому элементу T , представляющему собой пару чисел, можно поставить в соответствие некоторое значение АКФ, вычисленной на решетке Ω :



Р и с. 1. Двумерная решетка для вычисления АКФ

$R(H(i)-H(j))$; матрице T , таким образом, соответствует матрица отсчетов АКФ R . Тогда в двумерном случае оценка СПМ примет вид

$$S(\omega_1, \omega_2) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{m,n}^{(N+1)} \exp 2\pi i (\omega_1 T_{m,n}^{(1)} + \omega_2 T_{m,n}^{(2)}) - \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{m,n}^{(N)} \exp 2\pi i (\omega_1 T_{m,n}^{(1)} + \omega_2 T_{m,n}^{(2)}) \right]^{-2}, \quad (12)$$

где $G_{m,n}^{(N)}$ - элементы матрицы, обратной матрице $R^{(N)}$; $T_{m,n}^{(1)}$ ($T_{m,n}^{(2)}$) - первое (второе) число из пары чисел, стоящих на пересечении m - строки и n - столбца в матрице T .

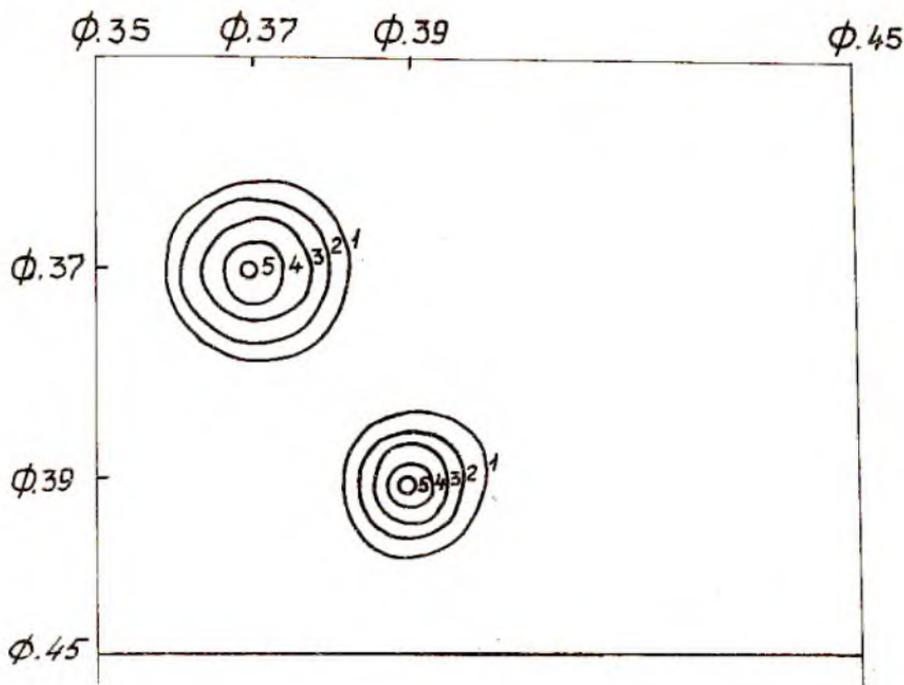
Следует особо отметить, что основой программной реализации алгоритма построения одномерных и многомерных оценок СПМ служит процедура обращения матрицы заданной структуры. В настоящее время существует целый ряд вычислительно эффективных методов инверсии матриц и созданных под эти методы спецвычислителей (спецпроцессоров) различной структуры [6], которые позволяют непосредственно использовать эти методы в современных АСНИ.

Было проведено численное моделирование для исследования вычислительной эффективности и разрешающей способности предложенного метода. Рассматривалась задача построения спектра модельного двумерного процесса, представляющего собой сумму синусоид на фиксированных частотах и нормального белого шума. Автокорреляционная функция такого процесса вычислялась по формуле Писаренко [7]:

$$R(x, t) = \sigma^2 \delta(x, t) + \sum_{i=1}^M a_i \exp 2\pi j (\omega_1(i)x + \omega_2(i)t), \quad (13)$$

где M - число синусоид, a_i - их веса, σ^2 - дисперсия наложенного нормального шума.

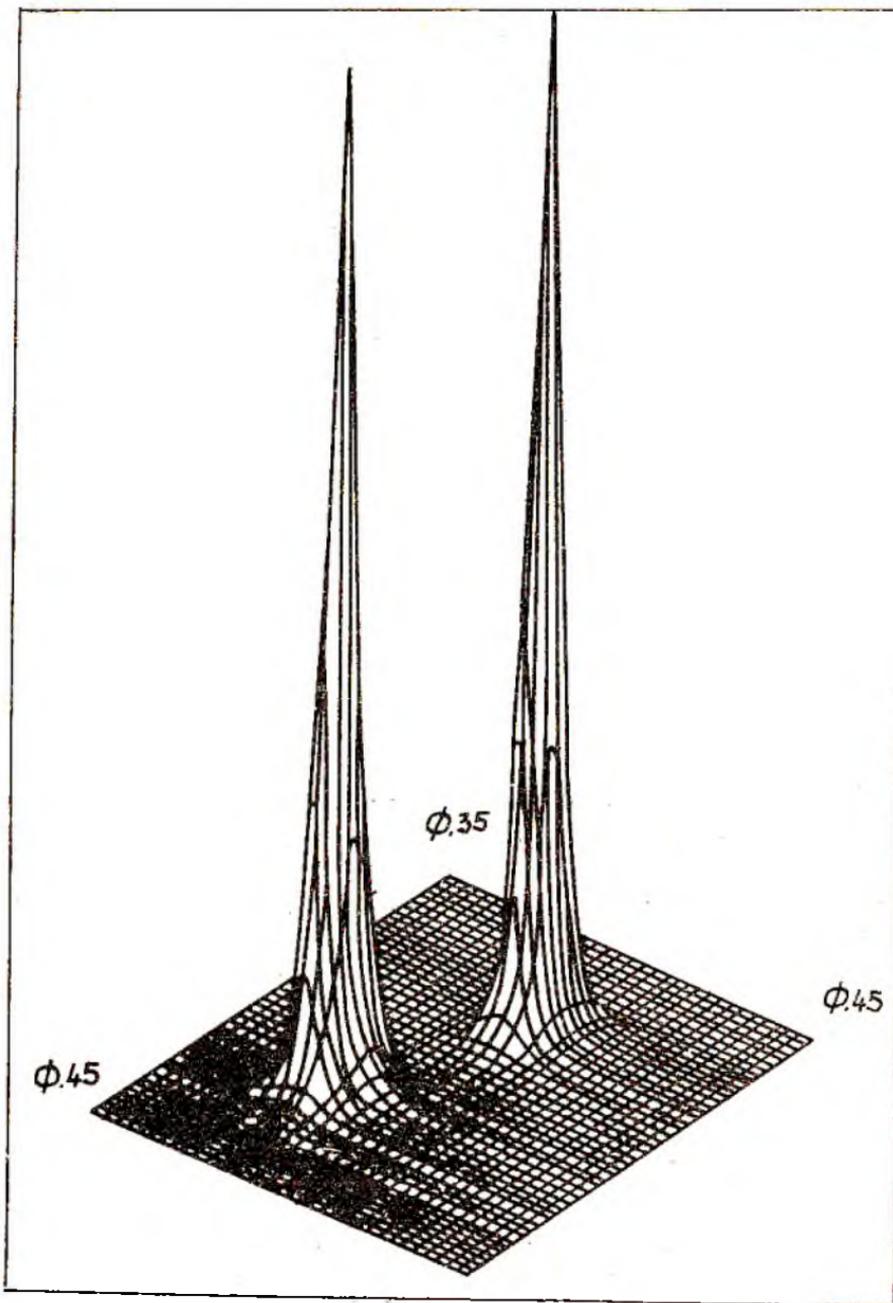
Для построения оценок СПМ использовались 25 отсчетов АКФ процесса, вычисленных на решетке вида Ω . Исследовался процесс, представляющий собой сумму синусоидального сигнала на частотах $\omega_1 = \omega_3 = 0,37$, $\omega_2 = \omega_4 = 0,39$ с весами $a_1 = a_2 = 1,0$ и нормального шума с дисперсией $\sigma^2 = 0,005$ (величина отношения сигнал/шум, определяемая как $10 \log (1/2\sigma^2)$ составила 20дБ). На рис. 2 представлены изолинии спектра, вычисленного на основе выражения (12) (значения изолиний: 1 - 12000, 2 - 16000, 3 - 20000, 4 - 24000, 5 - 28000). Они отражают практически дельта-



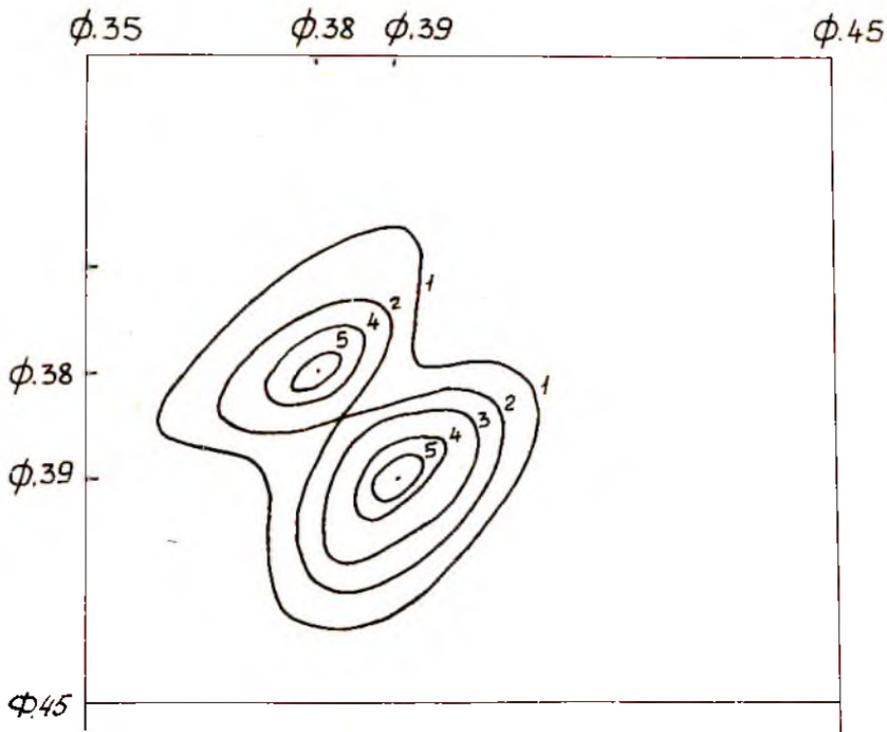
Р и с. 2. Изолинии спектра, вычисленные по формуле (12).

образный (соответствующий теоретическому) характер изменения спектральных линий и полное отсутствие ложных максимумов, что показано на рис. 3. При сближении частот до $\omega_1 = \omega_3 = 0,37$, $\omega_2 = \omega_4 = 0,38$ разрешение синусоид по частотам не исчезает, как видно из рис. 4 (значения изолиний: 1 - 715, 2 - 1431, 3 - 2862, 4 - 4294, 5 - 5010). Для сравнения на рис. 5 приведены изолинии спектра, построенного по традиционному методу Фурье (значения изолиний: 1 - 6,63, 2 - 0,137, 3 - 3,14, 4 - 4,13, 5 - 10,26). Видно, что метод Фурье не позволяет разрешить синусоиды по частотам и, более того, в спектре присутствуют сильно выраженные по амплитуде ложные максимумы (боковые лепестки).

Особо следует отметить, что процедура построения оценки СПМ по формуле (12) оказалась сравнимой с алгоритмом Фурье по вычислительным затратам, включающим в себя для нового метода операции,

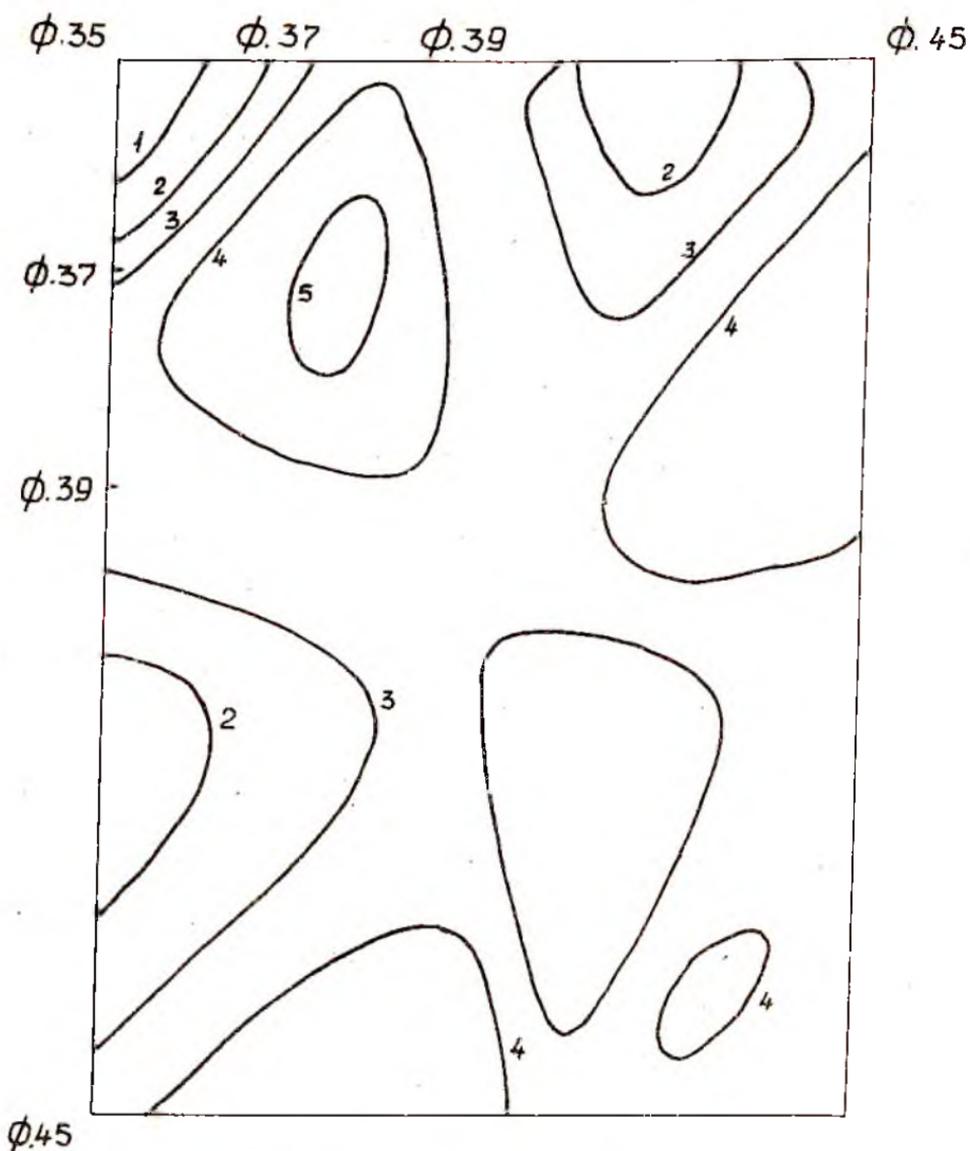


Р и с. 3. Характер спектральных линий



Р и с. 4. Изменение изолиний спектра при сближении частот

связанные с обращением матрицы отсчетов АКФ. Приведенные результаты свидетельствуют о высокой разрешающей способности и указывают на возможность создания вычислительно эффективных структур для реализации алгоритмов многомерного спектрального оценивания со сверхразрешением.



Р и с. 5. Изолинии спектра, построенного по методу Фурье

Библиографический список

1. А.с. 1249534 СССР, кл. *G06F 15/332*. Устройство для цифровой обработки материалов /М.В.Куприянова, Л.Р.Наймарк, С.И.Хазанович (СССР). № 3836876/24-24; Опубл. 07.01.85. Бюл. № 29, 1986.
2. Джейнс Э.Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии //ТИИЭР, 1982. Т. 70. № 9. С. 33-50.
3. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор //ТИИЭР. 1981. Т. 69. № II. С. 5-51.
4. Макклеллан Дж. Х. Многомерный спектральный анализ //ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 139-151.
5. *Burg J.P. Maximum entropy spectral analysis Ph.D. dissertation, Stanford, USA, 1975.*
6. *L. Buzzy, F.T. Luk, G. Speizer, G. Symansky. SLAPP: a systolic linear algebra parallel processor. Computer, N7, 1987. p. 45-49.*
7. *Dudgeon D.E. Mersereau M. Multi dimensional digital signal processing. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, USA, 1984, 448p.*