3. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. - М.: Мир, 1974. - 126 с.

УДК 681.518:519.722

М.В.Шелестова

# О ЗАДАЧЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(г. Томск)

При наблюдении свойств физических систем возникает необходимость выбора подходящего способа для численного представления сигналов. Целесообразно рассматривать сигналы, не связывая их в той или иной мере с системой, в которой они возникают, так как в этом случае возможно большое многообразие представлений /1, 2/.

Естественно, что выбор способа представления сигналов тесным образом связан с проблемой цифровой обработки сигналов на вычислительной машине. В связи с этим одним из основных требований, предъявляемых к выбранному способу представления, является относительная его простота с точки зрения его дальнейшего использования, а также удобства программирования. В данной статье предлагается в качестве такого метода - представление сигналов в базисе действительных экспонент.

1. Задача представления сигналов в базисе действительных экспоненциальных функций в наиболее общем виде может быть сформулирована следующим образом.

Имеется последовательность пар значений вида

$$(t_i,\ x_i),\quad i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

полученных в результате экспериментальных измерений некоторого сигнала $x(t)\in L^2(T), T=[0,\infty)$. Здесь $t_i,\ i=\overline{1,N}$ - некоторые дискретные моменты времени; $N$ - некоторое ограниченное натуральное число; $x_i$ - измеренные значения сигнала $x(t)$ при $t=t_i$. Необходимо определить размерность $n$ подпространства $M_n$, натянутого на базисные функции $\{e^{-\alpha_j t}\}$, коэффициенты $a_j$ и параметры $\alpha_j$, $j=\overline{1,n}$ таким образом, чтобы представление

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\alpha_j t} \qquad (2)$$

удовлетворяло следующему условию:

$$Q(n,a,\alpha) \equiv \|x - \hat{x}\| = \min_{\{n,a,\alpha\}}, \qquad (3)$$

где $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)^T$,

$\hat{x}_i = \hat{x}(t_i)$, $i = \overline{1,N}$, $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$,

$\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$,

$T$ - символ операции транспонирования; $\|x - \hat{x}\|$ - норма вектора $x - \hat{x}$ в пространстве $L^2(T)$;

$$Q(n,a,\alpha) = \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_i)^2\right]^{1/2} = \min_{\{n,c,\alpha\}} . \qquad (4)$$

В приведенной постановке решение задачи численного представления сигналов наталкивается на две существенные трудности, первая из которых обусловлена тем, что число $n$ по самой своей сути может принимать только целые и положительные значения. Данное обстоятельство исключает возможность применения для решения алгоритмов и методов поиска экстремума, основанных на использовании частных производных минимизируемой функции первого и более высокого порядков, и вынуждает использовать алгоритмы, основанные на переборе имеющихся здесь вариантов.

Вторая трудность, возникающая при решении задачи минимизации функции (4), заключается в том, что в отличие от коэффициентов $a$ параметры $\alpha$ входят в представление $\hat{x}(t)$ нелинейным образом. Данное обстоятельство, безусловно, существенно усложняет задачу и вынуждает использовать для ее решения либо метод наименьших квадратов в сочетании с методом линеаризации, либо какой-либо другой итерационный алгоритм из числа многих известных алгоритмов подобного типа /3/.

Важно отметить здесь также и то, что чувствительность функции $Q(n,a,\alpha)$ к изменениям коэффициентов $a$ и параметров $\alpha$ существенно различна на разных интервалах изменения $t$.

2. Рассмотренные выше особенности задачи представления сигнала в базисе экспоненциальных функций $\{e^{-\alpha_i t}\}$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i$ - неизвестные параметры, делают малоэффективными использование в дан-

ном случае широко известных методов поиска экстремума функций многих переменных и обусловливают необходимость применения для ее решения специальных алгоритмов, каким-либо образом учитывающих особенности и являющихся на этой основе более эффективными. Одн из них является так называемый многошаговый алгоритм, предложен в работе /4/.Данный алгоритм основан на использовании псевдообр ных матриц /4/ и имеет с. едующий вид:

$$C_K = C_{K-1} - \gamma \overset{*}{U}_K \Delta_K\ , \quad .. = 1,2,3,\ldots,\ C_0 = C^0.$$

Для упрощения и сокращения записи через $C_K$ и $C_{K-1}$ зд обозначены $2n$ -мерные векторы, первые $n$ компонент котор являются значениями коэффициентов $a_i$ , а остальные $n$ компо значениями параметров $\alpha_i$ , $i=\overline{1,N}$ на $K$ -й и $K-1$ -й итера соответственно. Остальные условные обозначения в рассматриваем алгоритме имеют следующий смысл:

$C_0 - 2n$ - мерный вектор начальных значений, коэффиц тов $a^0$ и $\alpha^0$ , выбираемых, вообще говоря произвольно;

$\overset{*}{U}_K - (2n \times l)$ - матрица, псевдообратная матрице $U_K$ ;

$U_K - (l \times 2n)$ - матрица, $i$ -я строка которой является градиентом функции (4), вычисленным в точке $C_i$ , $i = \overline{1,l}$ ;

$l$ - глубина памяти алгоритма;

$$\Delta_K \equiv (Q(C_K), Q(C_{K-1}), \ldots, Q(C_{K-l+1}))^T,$$

$\gamma$ - скалярный множитель, с помощью которого обеспечивается монотонная сходимость.

Данное обеспечение сходимости осуществляется следующим образом. Если окажется, что величина числа чрезмерно велика, и значение минимизируемой функции при новом значении $C_K$ будет больше, чем при значении $C_{K-1}$ , то значение $\gamma$ уменьшается, например, в два или большее число раз, и так делается до тех пор, пока значение функции $Q(C_K)$ в точке $C_K$ будет меньше значения этой функции в точке $C_{K-1}$ .

Существенной отличительной особенностью алгоритма является то, что его глубину памяти $l$ можно менять как до начала вычислений, так и непосредственно в процессе решения задачи в зависимости от скорости сходимости алгоритма. Это обстоятельство позволяет говорить об универсальности и гибкости данного алгоритма.

3. Рассмотрим пример, иллюстрирующий работоспособность предложенного метода представления сигнала в базисе действительных экспоненциальных функций $\{e^{-\alpha_i t}\}, i=\overline{1,n}$, когда параметры $\alpha_i$ не известны.

Пусть $M_n$ есть подпространство из $L^2[0,\infty)$, натянутое на действительные экспоненциальные функции $\{e^{-\alpha_1 t}, e^{-\alpha_2 t}, \ldots, e^{-\alpha_n t}\}$. Требуется найти наилучшее приближение в $M_n$ для прямоугольного импульса $x(t)=1$ для $0\leq t\leq 1/2$ $x(t)=0$ для $t>1/2$,

$x(t)=1=\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\alpha_i t}$, $t\in[0,1/2]$.

Запишем функцию

$$Q(n,a,\alpha)=\left\{\sum_{K=0}^{N}\left[1-\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\alpha_i t_K}\right]^2\right\}^{1/2},$$

здесь $t_K=K\Delta t$, $\Delta t=0{,}05$, $N=10$.

Будем искать $\hat{Q}=\min\limits_{n,a,\alpha} Q(n,a,\alpha)$ для $n$ = I, 2, 3 с помощью описанного многошагового алгоритма поиска экстремума.

Полученные результаты сведем в таблицу.

| $n$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\hat{Q}$ | $\ell$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0,476 | – | – | 0,27 | – | – | 0,846 | 2 |
| 2 | 0,549 | 0,536 | – | 0,629 | 0,658 | – | 0,I54 | 4 |
| 3 | 0,303 | 2,I3 | -I,44 | 0,8II | I,I4 | 2,I4 | 0,0008 | 6 |

Из таблицы видно, что наилучшее представление единичного сигнала в подпространстве $M_n$ достигается, когда $n$ = 3, а подпространство $M_3$ натянуто на функции $\{e^{-0.811t}, e^{-1.44t}, e^{-2.14t}\}$ и $a=\{0{,}303, 2{,}13, -1{,}44\}$ есть представление $x(t)$ в $R^3$.

Резюмируя вышеизложенное, отметим основные результаты работы:

показана возможность использования действительных экспоненциальных функций для представления сигналов;

обсуждены наиболее существенные особенности задачи аппроксимации сигналов экспоненциальными функциями с вычислительной точки зрения и рассмотрены некоторые подходы к ее решению;

показана целесообразность использования для решения данной задачи многошагового алгоритма поиска экстремума функций любых переменных и обсуждены сущность и важные свойства данного алгоритма.

Практическая возможность применения экспоненциальных функций для представления сигналов и работоспособность многошагового алгоритма поиска экстремума проиллюстрированы на примере приближения единичного импульса.


Библиографический список

1. Френкс Л. Теория сигналов. - М.: Советское радио, 1974. - 344 с.

2. Хэмминг Р.В. Численные методы. - М.: Наука, 1968. - 400 с.

3. Ортэга К. Итерационные методы решения систем. - М.: Наука, 1965. - 415 с.

4. Светлаков А.А. Применение обобщенных матриц в решении экстремальных задач //Корреляционно-экстремальные системы управления: Сб.науч.работ. - Томск, 1980. - Вып. 1. - С. 125-135.



УДК 681.3



В.В.Сергеев, А.В.Усачев


ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ


(г. Куйбышев)


При автоматизированном проектировании оптических средств формирования и обработки изображений часто возникает задача цифрового моделирования двумерной линейной системы, преобразующей пространственный сигнал. В случае, если система является пространственно-инвариантной, такое моделирование заключается в вычислении выходного сигнала $g$ по известному входному $f$ через двумерную свертку /1/:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta, \qquad (1)$$

где $h$ - импульсная характеристика системы; $x,y$ - пространственные аргументы сигнала.(Здесь и далее предполагается, что все подынтегральные выражения таковы, что соответствующие интегралы сходятся).

Наряду со сверткой (1) обычно рассматривается и более компактное выражение для Фурье-образов введенных функций