

ритма поиска экстремума проиллюстрированы на примере приближения единичного импульса.

### Библиографический список

1. Френкс Л. Теория сигналов. - М.: Советское радио, 1974. - 344 с.
2. Хэмминг Р.В. Численные методы. - М.: Наука, 1968. - 400 с.
3. Ортэга К. Итерационные методы решения систем. - М.: Наука, 1965. - 415 с.
4. Светлаков А.А. Применение обобщенных матриц в решении экстремальных задач //Корреляционно-экстремальные системы управления: Сб.науч.работ. - Томск, 1980. - Вып. I. - С. 125-135.

УДК 681.3

В.В.Сергеев, А.В.Усачев

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
С РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

(г. Куйбышев)

При автоматизированном проектировании оптических средств формирования и обработки изображений часто возникает задача цифрового моделирования двумерной линейной системы, преобразующей пространственный сигнал. В случае, если система является пространственно-инвариантной, такое моделирование заключается в вычислении выходного сигнала  $g$  по известному входному  $f$  через двумерную свертку  $/I/$ :

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (I)$$

где  $h$  - импульсная характеристика системы;  $x, y$  - пространственные аргументы сигнала. (Здесь и далее предполагается, что все подынтегральные выражения таковы, что соответствующие интегралы сходятся).

Наряду со сверткой (I) обычно рассматривается и более компактное выражение для Фурье-образов введенных функций

$$G(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) H(\omega_x, \omega_y), \quad (2)$$

где  $H$  - частотная характеристика системы, связанная с импульсной двумерным преобразованием Фурье

$$H(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dx dy, \quad (3)$$

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y) \exp\{i(\omega_x x + \omega_y y)\} d\omega_x d\omega_y; \quad (4)$$

где  $F, G$  - спектры входного и выходного сигналов соответственно, связанные с самими сигналами  $f$  и  $g$  аналогичными соотношениями;  $\omega_x, \omega_y$  - пространственные частоты, аргументы записанных спектральных функций.

Поставим задачу моделирования ситуации, широко распространенной на практике.

Пусть двумерная система задана своей частотной характеристикой и эта характеристика обладает свойством радиальной симметрии

$$H(\omega_x, \omega_y) = H_p(\rho), \quad \rho = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}. \quad (5)$$

Двумерный входной сигнал  $f(x, y)$  отличен от нуля лишь в прямоугольной области и представлен сеткой отсчетов, полученных его равномерной дискретизацией по координатам с шагом  $T$ :

$$f_{mn} = \begin{cases} f(mT, nT) & \text{при } (m, n) \in [0, M-1] \times [0, N-1], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

где  $M, N$  - размеры информативной части массива входных отсчетов. Шаг  $T$  достаточно мал, чтобы пренебречь эффектом наложения спектров при дискретизации  $|f|$ , т.е. принять, что спектр входного сигнала ограничен:

$$F(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad \text{при } |\omega_x| \geq \frac{\pi}{T} \quad \text{или} \quad |\omega_y| \geq \frac{\pi}{T}. \quad (7)$$

Из выражения (2) видно, что такое же ограничение одновременно выполняется и для спектра выходного сигнала. При этом, в силу теоремы Котельникова, как для входного, так и для выходного сигнала дискретизация с шагом  $T$  не сопровождается потерей информации.

Требуется определить отсчеты выходного сигнала на некотором

двумерном прямоугольном интервале, произвольно расположенном относительно начала координат:

$$g_{k\ell} = g(kT, \ell T), \quad (k, \ell) \in [k_1, k_2] \times [\ell_1, \ell_2], \quad (8)$$

где  $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2$  - границы интересующей нас области выходных отсчетов.

При выполнении ограничения (7) точно так же можно ограничить и частотную характеристику системы:

$$H(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad \text{при } |\omega_x| > \frac{\pi}{T} \text{ или } |\omega_y| > \frac{\pi}{T}, \quad (9)$$

что, как следует из (2), не окажет влияния на результат преобразования сигнала. После этого непрерывная свертка (I) для дискретизированного результата без потери точности может быть заменена дискретной аперiodической сверткой /I/, которая с учетом выражения (6) и необходимого нормировочного коэффициента запишется в виде

$$g_{k\ell} = T^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} h_{k-m, \ell-n}, \quad (10)$$

где  $h_{pq}$  - отсчеты импульсной характеристики, взятые с шагом  $T$  по координатам

$$h_{pq} = h(pT, qT), \quad (11)$$

причем сама импульсная характеристика должна соответствовать обратному преобразованию Фурье (4) частотной характеристики при наложенном ограничении (9).

Для вычисления на ЭВМ выражений вида (10) известен эффективный метод, основанный на применении быстрых алгоритмов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) /2/. Он заключается в выполнении двух прямых ДПФ для массивов отсчетов входного сигнала и импульсной характеристики, перемножении получаемых дискретных спектров и выполнении обратного преобразования для формирования результата. Напомним, что, строго говоря, в результате применения метода ДПФ вычисляется не аперiodическая свертка (10), а циклическая (в предположении периодической продолженности функций, участвующих в свертке). Чтобы "нейтрализовать" влияние циклическости, следует надлежащим образом набирать параметры (размеры) ДПФ, исходя из размеров "ненулевых" частей сворачиваемых массивов /2/.

В рамках поставленной задачи метод ДПФ приобретает ряд особенностей. Во-первых, нам известны только размеры массива входного сигнала, см. (6), а "размах" дискретизированной импульсной характеристики еще подлежит определению. Во-вторых, описание системы в частотной области позволяет сэкономить одно преобразование. В-третьих, можно получить дополнительный выигрыш в объеме вычислений за счет учета ограничений на область определения получаемых результатов (2).

С учетом сказанного общая схема решения задачи моделирования включает в себя следующие этапы:

определение размеров дискретизированной импульсной характеристики системы;

расчет параметров ДПФ, исходя из размеров информативной (ненулевой) части входных отсчетов, размеров импульсной характеристики и ограничений на область выходных отсчетов;

выполнение прямого ДПФ для двумерного массива входных отсчетов;

умножение полученного дискретного спектра на отсчеты частотной характеристики (усеченной в соответствии с (9) и периодически продолженной  $/2/$ );

выполнение обратного ДПФ, получение искомым отсчетов выходного сигнала.

Исходя из условий радиальной симметрии частотной характеристики (5) двумерной линейной системы, нетрудно показать, что ее импульсная характеристика также радиально-симметрична:

$$h(x, y) = h_z(z), \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (12)$$

Моделируемая система устойчива, иначе для нее частотная характеристика не была бы определена, поэтому абсолютные значения  $h_z(z)$  быстро убывают с ростом  $z$ . Ненулевые значения импульсной характеристики можно считать сосредоточенными в некоторой круговой или (что для нас важнее) квадратной области с центром в начале координат. Соответствующее ограничение запишется в виде

$$h(x, y) = 0 \quad \text{при } |x| \geq R \text{ или } |y| \geq R, \quad (13)$$

где  $R$  - "радиус" области ненулевых значений импульсной характеристики,

или, с учетом процедуры дискретизации (II), в виде

$$h_{pq} = 0 \quad \text{при } |p| \geq P \text{ или } |q| \geq P, \quad P = \frac{R}{T}. \quad (14)$$

Для оценки параметра  $R$  в ограничении (13) нужно вычислить  $h(x, y)$  через двумерное преобразование Фурье (4) заданной частотной характеристики, что весьма трудоемко. Предлагается существенно более простой способ оценки размаха импульсной характеристики через одномерное преобразование, вытекающий из радиальной симметрии частотной характеристики. Из выражений (5) и (3) следует

$$H_{\rho}(\rho) = H(\omega_x, \omega_y) \Big|_{\substack{\omega_x = \rho \\ \omega_y = 0}} = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i\rho x} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\Sigma}(x) e^{-i\rho x} dx \quad (15)$$

где

$$h_{\Sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy. \quad (16)$$

Здесь функция  $H_{\rho}(\rho)$ , определенная по (5), считается четным образом продолженной на область  $\rho < 0$ .

Соотношение (15) задает одномерное прямое преобразование Фурье функции (16). Нам необходимо воспользоваться соответствующим обратным преобразованием

$$h_{\Sigma}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\rho}(\rho) e^{i\rho x} d\rho. \quad (17)$$

Размах радиально-симметричной двумерной импульсной характеристики (12) и одномерной функции (16) одинаков (рис. 1), поэтому параметр  $R$  можно определить, например, как наименьшее положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$1 - \frac{\int_0^R |h_{\Sigma}(x)| dx}{\int_0^{\infty} |h_{\Sigma}(x)| dx} < \varepsilon, \quad (18)$$

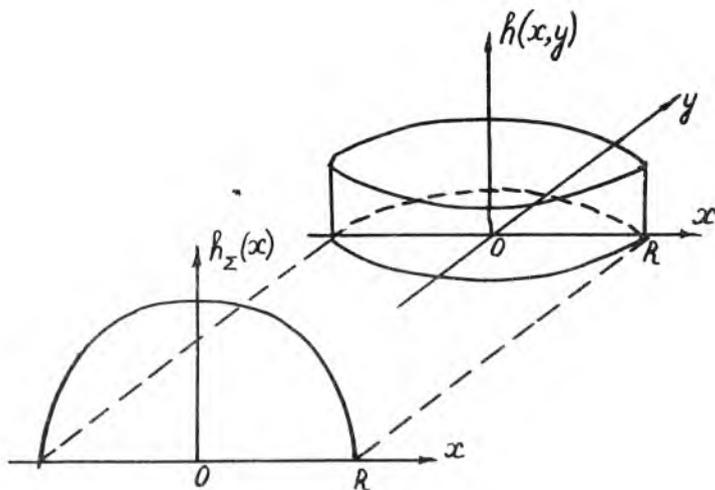
где  $\varepsilon$  - величина, характеризующая погрешность усечения импульсной характеристики ( $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

При оценке на ЭВМ размера  $D$  дискретизированной импульсной характеристики (14) модификация выражений (17) и (18) для использования одномерного ДПФ не представляет сложности.

Процедуру определения минимально необходимого размера ДПФ для краткости опишем применительно к одномерному случаю. Пусть требуется вычислить

$$g_k = \sum_{m=0}^{M-1} f_m h_{k-m} \quad (19)$$

для



Р и с. 1. Определение размаха импульсной характеристики

$$K \in [K_1, K_2], \quad (20)$$

причем

$$f_m = 0 \quad \text{при} \quad m \in [0, M-1], \quad (21)$$

$$h_m = 0 \quad \text{при} \quad |m| > P. \quad (22)$$

Выражения (19)–(22), очевидно, являются одномерными аналогами выражений (10), (8), (6) и (14) соответственно.

Как известно, по методу ДПФ вычисляется циклическая свертка, в которой все участвующие последовательности являются периодическими с периодом  $I$ -размером (длиной) ДПФ:

$$g_k^{пер} = \sum_{m=0}^{I-1} f_m^{пер} h_{k-m}^{пер}, \quad (23)$$

где

$$g_k^{пер} = \sum_{z=-\infty}^{\infty} g_{k+Iz}, \quad f_m^{пер} = \sum_{z=-\infty}^{\infty} f_{m+Iz}, \quad h_m^{пер} = \sum_{z=-\infty}^{\infty} h_{m+Iz}. \quad (24)$$

Необходимо, чтобы результаты вычислений по свертке (23) совпадали со значениями искомой последовательности (19) для "выходного

окна" аргументов (20), несмотря на возможные эффекты наложения при переходе по (24) от последовательностей конечной длины к периодическим.

На рис. 2 схематически показана взаимосвязь отсчетов входной и выходной последовательностей в аperiodической свертке (19). Как следует из рис. 2,а, для вычисления  $g_k$  на интервале (20) в общем случае нам нужна информация о значениях  $f_m$  во "входном окне":

$$m \in [m_1, m_2], \quad (25)$$

где

$$m_1 = K_1 - P + 1, \quad m_2 = K_2 + P - 1. \quad (26)$$

Следовательно, при вычислениях можно положить равными нулю значения входной последовательности  $f_m$  вне интервала (25) и взять длину ДПФ

$$I = m_2 - m_1 + 1 = K_2 - K_1 + 2P - 1, \quad (27)$$

при этом эффекты наложения в циклической свертке будут исключены.

Если выходное окно или длина импульсной характеристики таковы, что входное окно (25) выходит за пределы интервала ненулевых значений последовательности  $f_m$ , т.е. из выражений (26) следует

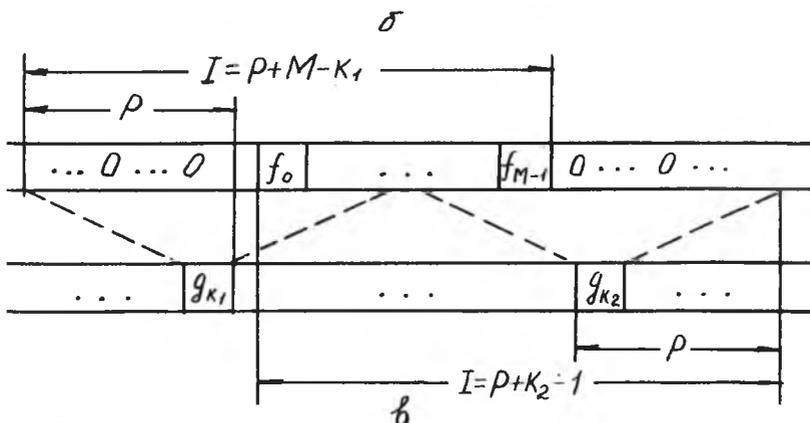
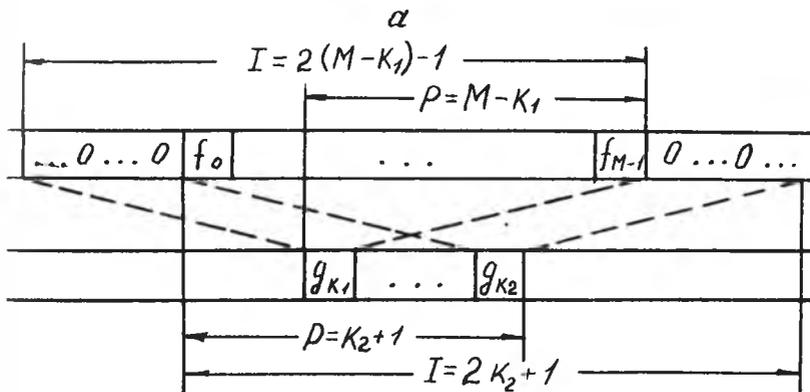
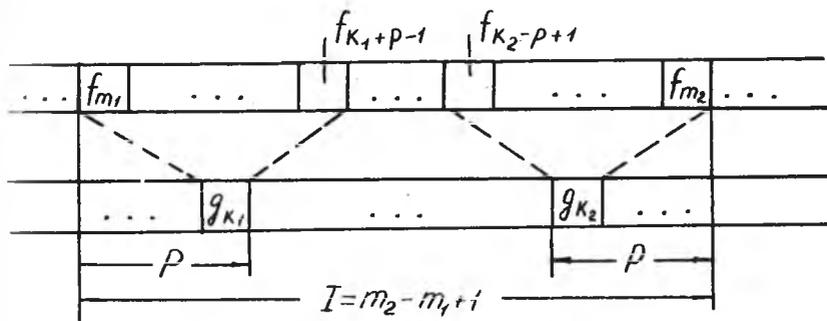
$$m_1 < 0, \quad m_2 > M - 1, \quad (28)$$

то возможно дополнительное сокращение длины ДПФ. Рассмотрим конкретные ситуации.

Если размах импульсной характеристики велик так, что  $P > M$ , то для вычисления каждого требуемого отсчета выходной последовательности нужны все ненулевые отсчеты входной, и в этом случае из выражения (19) следует, что для вычисления достаточно использовать лишь часть ненулевых отсчетов импульсной характеристики  $h_m, m \in [K_1 - M + 1, K_2]$ , а остальные можно положить равными нулю.

Удобно рассматривать симметричное усечение импульсной характеристики, т.е. в (22) принять

$$P = \max \{ M - K_1, K_2 - 1 \}. \quad (29)$$



Р и с. 2. Взаимосвязь отсчетов входной и выходной последовательности в аperiodической свертке

В этом случае элементы ДПФ соответствующей последовательности будут в точности отсчетами частотной характеристики. Тогда вместо выражений (26) и (27) можно положить (рис. 2,б):

$$m_1 = \min\{0, K_1\}, I = 2P - 1, m_2 = m_1 + I - 1. \quad (30)$$

Здесь учтено, что выбор начального значения  $m_1$  выходного окна достаточно произволен: главное, чтобы оно охватывало все ненулевые значения входного сигнала.

Заметим, что в данном случае при  $K_1 = 0, K_2 = M - 1$  приходим к известной "усеченной" свертке длины  $M$ , для вычисления которой достаточно использовать циклическую свертку длины  $(2M - 1) / 3$ .

Если длина импульсной характеристики мала ( $P < M$ ), но выполняются неравенства (28) (рис. 2,в), то с учетом цикличности свертки можно допустить "безопасный" эффект наложения в результате вычислений, сохранив во входном окне нули только с одной стороны, а именно там, где их больше:

$$m_1 = 0, I = P + \max\{M - K_1, K_2 - 1\}, m_2 = I - 1. \quad (31)$$

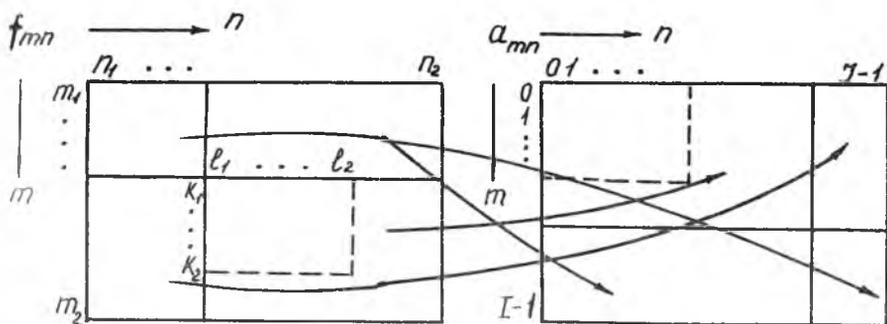
При определении размеров ДПФ и входного окна (25) следует учитывать, что преобразование эффективно реализуется не для всяких  $I$ . Найденное по формулам (27), (30) или (31) значение длины ДПФ следует затем увеличить до ближайшего значения, допускающего построение быстрого алгоритма преобразования (например до целой степени числа 2). Соответственно, на столько же должно быть расширено и входное окно (увеличен параметр  $m_2$ ).

После описанных выше подготовительных операций нужно, наконец, произвести вычисление свертки (10). Обобщив изложенное в предыдущем пункте применительно к двумерному случаю, видим, что для получения отсчетов  $g_{kx}$  в выходном окне (8) необходимо использовать отсчеты  $f_{mn}$  в двумерном входном окне

$$(m, n) \in [m_1, m_2] \times [n_1, n_2] \quad (32)$$

и двумерное ДПФ размерами  $I \times J$  ( $I = m_2 - m_1 + 1, J = n_2 - n_1 + 1$ ). Последовательность действий при этом такова.

Для получения результатов вычислений в удобной форме отсчеты сигнала из входного окна (32) размещаются в двумерном массиве  $a_{mn}$  преобразуемых данных так, как это показано на рис. 3.



Р и с. 3. Перестановка элементов массива преобразуемых данных при вычислении двумерной свертки

Выполняется прямое двумерное ДПФ:

$$A_{pq} = \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} a_{mn} \exp\left\{-i2\pi\left(\frac{pm}{I} + \frac{qn}{J}\right)\right\}. \quad (33)$$

Полученные значения дискретного спектра при  $(p, q) \in [0, I-1] \times [0, J-1]$  умножаются на отсчеты частотной характеристики двумерной системы

$$B_{pq} = A_{pq} H_{pq}. \quad (34)$$

При этом учитываются введенные ограничения (9) и тот факт, что частотная характеристика дискретной линейной системы (т.е. преобразование Фурье дискретизированной с шагом  $T$  импульсной характеристики) есть периодическая функция с периодом  $2\pi/T$  по каждому аргументу  $/I, 2/$ , так что

$$H_{pq} = H(\omega_x^{(p)}, \omega_y^{(q)}), \quad (35)$$

где (в предположении четных  $I, J$ )

$$\omega_x^{(p)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{IT} p & \text{при } 0 \leq p \leq \frac{I}{2} - 1, \\ \frac{2\pi}{IT} (I-p) & \text{при } \frac{I}{2} \leq p \leq I-1, \end{cases} \quad \omega_y^{(q)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{JT} q & \text{при } 0 \leq q \leq \frac{J}{2} - 1, \\ \frac{2\pi}{JT} (J-q) & \text{при } \frac{J}{2} \leq q \leq J-1. \end{cases} \quad (36)$$

Далее выполняется обратное двумерное ДПФ:

$$b_{k\ell} = \frac{1}{IJ} \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} B_{pq} \exp\left\{i2\pi\left(\frac{kp}{I} + \frac{\ell q}{J}\right)\right\}. \quad (37)$$

В первых элементах, т.е. левом верхнем углу массива  $b_{k\ell}$ , содержатся искомые значения отсчетов выходного сигнала (8) (рис. 4)

		$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^{l}$ $0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots$				
$k$ $\downarrow$	0	$g_{k,0}$	...	...	$g_{k,l_2}$	...
	1	...	...		...	
	2					
	...	...			...	
		$g_{k,l_1}$	...	...	$g_{k,l_2}$	...

$$f_{k\ell} = v_{k-k_1, \ell-\ell_1}, \quad (38)$$

$$(k, \ell) \in [k_1, k_2] \times [\ell_1, \ell_2].$$

Описанная методика цифрового моделирования непрерывной двумерной линейной системы гарантирует адекватное преобразование пространственных сигналов и экономична с вычислительной точки зрения.

Библиографический список

- Р и с. 4. Размещение результатов свертки в массив  $v_{k\ell}$
1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. - Т. I. - М.: Мир, 1982. - 312 с.
2. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1978. - 848 с.
3. Годуб М.А., Имамутдинов Н.П. Алгоритмы двумерной быстрой аperiodической свертки // Автоматизация экспериментальных исследований. - Куйбышев: КуАИ, 1982. - С. 69-74.

УДК 621.396.9+629.7.05:621.391.268

Ю.А.Андреев, Г.М.Макаров, М.Я.Штейнбок

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МАКЕТА ЦИФРОВОЙ  
 КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ  
 (г. Томск)

Корреляционно-экстремальные навигационные системы (КЭНС) являются наиболее точными навигационными системами из всех существующих в настоящее время. Принцип их работы заключается в сравнении двух изображений, эталонного (ЭИ) и текущего (ТИ), и вычисления критерия их близости (корреляционной или какой-либо другой статистической функции). Координаты экстремума критерия близости указывают на рассогласование между изображениями.