УДК 518.514.3:531.391.5

Г.А.Долгов, А.В.Сергиевский, М.А.Чубаров

АВТОМАТИЗАЦИЯ СИМВОЛЬНО-ЧИСЛОВЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

(г. Горький)

Анализ устойчивости динамических систем в зависимости от их параметров обычно связан с выполнением трудоемких аналитических преобразований. Примером таких преобразований может служить вычисление символьного детерминанта при получении характеристического полинома системы линейных дифференциальных уравнений. Использование систем аналитических вычислений /I, 2/ для проведения громоздких аналитических выкладок сокращает трудоемкость этапов подготовки задачи к численному счету, уменьшает вероятность проявления ошибок в расчетных формулах и позволяет решать задачи, аналитические преобразования в которых требуют непомерных затрат ручного труда.

Применение ЭВМ для выполнения аналитических преобразований существенно облегчает проведение вычислительного эксперимента/3/, в особенности на этапах алгоритмизации, составления программ и выполнения расчетов. В системах для символьно-числовых вычислений исходная математическая модель может быть задана как аналитическая информация, что позволяет разрабатывать программы, инвариантные относительно математических моделей, и существенно упрощает поиск адекватных моделей, удовлетворяющих техническим условиям и согласующихся с экспериментальными данными /4/.

Для реализации аналитических и символьно-числовых расчетов при анализе устойчивости и поведения переходных процессов в линеаризованных моделях в НИИ ПМК при Горьковском университете разработана автоматизированная система МАУС (условное название - АСНИ "Абстракция") Моделирования и Анализа Устойчивости.

Аналитические преобразования в системе МАУС выполняются над алгебраическими полиномами и составленными из них прямоугольными матрицами. Алгебраические полиномы хранятся в раскрытой форме

$$\sum_i a_i x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \ldots x_n^{b_{in}}, \qquad (I)$$

где a_i - коэффициенты, b_{ij} - показатели степеней переменных x_j, принимающие произвольные целые значения из диапазонов $-l_{1j} \leqslant b_{ij} < l_{2j}$. Полином (I) хранится в виде списков коэффициентов a_i и упакованных степенных частей

$$c_i = (b_{1n} + l_{1n}) + l_n(b_{1n-1} + l_{1n-1}) + \ldots + l_n l_{n-1} \cdots l_2 (b_{i1} + l_{11}),$$

где $l_j = l_{1j} + l_{2j}$. Коэффициенты a_i могут быть одного из следующих типов: целый, вещественный, вещественный двойной точности, комплексный, комплексный двойной точности, рациональный. Коэффициенты и степенные части полиномов хранятся соответственно в рабочих полях P и NP, представляющих собой массивы произвольной длины. Полиномиальная матрица состоит из массива характеристик, содержащего различную справочную информацию, степенных частей и коэффициентов образующих ее полиномов, и рассматривается системой как специальная аналитическая единица со своим именем.

Система МАУС позволяет реализовать следующие операции над многочленами и полиномиальными матрицами: форматный и текстовый ввод и вывод, арифметические операции над полиномами, подстановки в полином или матрицу численных или аналитических значений переменных, элементарные операции над столбцами матриц, транспонирование, сложение и умножение матриц. Кроме того, в АСНИ реализованы вычисление детерминантов полиномиальных матриц по двум различным алгоритмам, нахождение союзной матрицы и решение систем линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

С помощью системы МАУС можно, в частности, найти коэффициент передачи многомерной линейной системы, получить в аналитической форме условия устойчивости или апериодичности, рассчитать инноры матриц /5/. Часто встречающиеся в теории устойчивости символьные детерминанты Гурвица или Эрмита-Гурвица /6/ целесообразно вычислять посредством формирования последовательностей полиномиальных остатков (ППО) /7, 8/.

ППО $R_\nu(P_1, P_2) = (P_1, P_2, \ldots, P_{\nu})$ в кольце $G[z]$ определяется рекуррентным соотношением

$$a_i^{(\nu)} P_{i-2} = q_i P_{i-1} + S_i \;, \quad P_i = S_i / b_i^{(\nu)}, \tag{2}$$

где $i = 3, \ldots, \nu+1$ полиномы $q_i(z)$ и $S_i(z)$ являются частным и остатком от деления $a_i^{(\nu)} P_{i-2}$ на P_{i-1}, $P_i \in G[z]$, а $S_{\nu+1} \equiv 0$.

Коэффициенты $a_i^{(\nu)}, b_i^{(\nu)} \subset G$ отличны от нуля и определяют тип ППО. Обозначим через n_i степень полинома P_i, через c_i его старший коэффициент и введем разность $\delta_i = n_i - n_{i+1}$. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай регулярных ППО, в котором все $\delta_i = 1$ при $i > 1$ и $n_\nu = 0$.

В общем случае определители Гурвица и Эрмита-Гурвица можно вычислить с помощью сокращенной ППО $R_1(P_1, P_2)$, определяемой коэффициентами $a_i^{(1)} = c_{i-1}^2$, $b_3^{(1)} = -1$, $b_i^{(1)} = -a_{i-1}^{(1)}$ $(i > 3)$. Если сформировать для вещественного полинома $f(x) = \sum_{i=0} f_i x^{n-i}$ две сокращенные ППО $R_1(P_1^{(r)}, P_2^{(r)})$, $r = 1,2$, по исходным полиномам

$$P_1^{(1)} = f_0 z^{s_1} + f_2 z^{s_1 - 1} + \ldots; \quad P_2^{(1)} = f_1 z^{s_1-1} + f_3 z^{s_1-2} + \ldots; \quad s_1 = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$P_2^{(1)} = f_0 z^{s_2} + f_2 z^{s_2-1} + \ldots; \quad P_2^{(2)} = -f_1 z^{s_2} - f_3 z^{s_2-1} - \ldots; \quad s_2 = \left[\frac{n}{2}\right],$$

то старшие коэффициенты $c_i^{(r)}$ элементов этих ППО будут равны определителям Гурвица для полинома $f(x)$:

$$c_i^{(1)} = \Delta_{2i-3} \ (i \geqslant 2), \quad c_i^{(2)} = \Delta_{2(i-2)} \ (i \geqslant 3).$$

Для полинома $f(x)$ с комплексными коэффициентами при $f(jz) = P_1 + jP_2$ старшие коэффициенты элементов сокращенной ППО $R_1(P_1, P_2)$ выражаются через определители $\nabla_{2\ell}$ Эрмита-Гурвица /8/ в виде $c_i = \nabla_{2(i-2)} (i > 2)$, если $\delta_1 = 0$, и $c_i = c_1^{-1} \nabla_{2(i-1)} (i \geqslant 2)$ при $\delta_1 = 1$. Проведенный анализ числа арифметических операций и эксперимент на ЭВМ /7/ показывают, что использование сокращенной ППО для вычисления таких детерминантов в символьном виде требует меньших затрат времени по сравнению с алгоритмами типа Гаусса.

После проведения необходимых аналитических преобразований АСНИ МАУС позволяет непосредственно переходить к численным расчетам по полученным формулам. Эта возможность осуществляется с помощью подпрограмм подстановок АСНИ, что исключает паузы, связанные с трансляцией и редактированием и возникающие в системах аналитических преобразований, выдающих получаемые результаты на одном из языков численного программирования. Такой способ реализации символьно-числового интерфейса повышает эффективность выполнения гибридных численно-аналитических расчетов.

АСНИ МАУС содержит подсистему для символьно-числового разбиения пространства параметров произвольной линеаризованной модели на области с одинаковым в качественном отношении расположением корней характеристического полинома. Линеаризованная модель задается характеристической матрицей $A=\|a_{ij}\|$, элементами которой являются алгебраические полиномы вида

$$a_{ij}=\sum_{\ell} c_{\ell}\,p^{b_{0\ell}} z_1^{b_{1\ell}} z_2^{b_{2\ell}} \cdots z_m^{b_{m\ell}},$$

где c_{ℓ} - вещественные коэффициенты, p - оператор дифференцирования, $z_1, \dots, z_m$ - параметры, $b_{1\ell}, \dots, b_{m\ell}$ - целые степени произвольного знака, $b_{0\ell}$ - целые неотрицательные степени. Система рассчитывает характеристический полином $X=\det A$ в символьном виде и производит разбиение плоскости двух произвольных параметров на области, в которых этот полином имеет одинаковое число корней в правой полуплоскости, одинаковое число вещественных, отрицательных или положительных корней, корней вне единичного круга, вещественных корней внутри и вне единичного круга. В других режимах можно выполнить расчет областей с заданным запасом устойчивости, вычислить экстремальные точки области устойчивости и рассчитать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики линеаризованной модели. Результаты расчетов выводятся в табличной форме или в виде графиков с использованием комплекса ГРАФОР.

АСНИ МАУС написана на языка ФОРТРАН-4, содержит более I4000 операторов ФОРТРАНа и функционирует как в операционной среде ОС ЕС,так и в ДОС ЕС. Система использовалась при решении ряда научно-исследовательских и производственных задач и внедряется в учебный процесс.

Библиографический список

I. Гердт В.П.,Тарасов О.В., Ширков Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике //УФН. - I980. - т. I30. - Вып. I. - С. II3-I47.

2. Грошева М.В., Ефимов Г.Б. и др. Системы аналитических вычислений на ЭВМ (Аналитические пакеты прикладных программ): Препринт Ин.прикл.мат. им. М.В.Келдыша АН СССР. - I983. - № I. - 65 с.

3. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент //Вестник АН СССР. - I979. - № 5. - С. 38-49.

4. Сергиевский А.В., Чубаров М.А. Системы аналитических преобразований и САПР //Математическое моделирование и программное обеспечение в САПР: Сб.науч.работ. - Горький: Изд. ГГУ, I984. - С. 3-I2.

5. Джури Д. Инноры и устойчивость динамических систем. - М.: Наука, 1979. - 299 с.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1966. - 576 с.

7. Алексеев А.С., Макарычева Д.Н., Чубаров М.А. Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ //Теория устойчивости и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1979. - С. 229-239.

8. Чубаров М.А. Проблема Рауса-Гурвица и последовательности полиномиальных остатков //Динамика систем. - Горький:Изд.ГГУ, 1974. - Вып. 2. - С. 135-163.

УДК 519.6

Ю.М.Агеев, Е.А.Кочегурова

РЕКУРРЕНТНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

(г. Томск)

Для большого круга задач обработки измерительной информации реальные сигналы на выходах измерительных устройств могут быть с достаточной степенью точности представлены полиномами. Это вызывает необходимость изучения использования полиномиальных фильтров в задачах автоматизированной обработки экспериментальных данных.Здесь рассматривается задача рекуррентного восстановления дискретизированных сигналов. При этом предполагается, что измеренные значения $f(x_j)=u(x_j)+\xi(x_j)$, где $u(x_j)$ - полезный низкочастотный сигнал, $\xi(x_j)$ - широкополосная помеха, x_j - дискретные моменты времени. В качестве восстанавливающей функции выбран рекуррентный сглаживающий полиномиальный сплайн третьего порядка.

Алгоритм построения сглаживающего сплайна (СС) основан на использовании условия сопряжения сплайна и минимизации выражения

$$J=(1-\rho)h^2\int_{x_i}^{x_{i+n}}[S''(x)]^2dx+\rho\sum_{j=i}^{i+n}[S(x_j)-f(x_j)]^2, \qquad (1)$$

где ρ - весовый множитель;