

В. Е. ШАТЕРНИКОВ,  
В. А. ДЕНИСОВ, Ю. И. СТЕБЛЕВ

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВИХРЕТОКОВОГО ПРОВОДНИКОВОГО ДАТЧИКА НАД ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

В последнее время получили большое распространение вихре-токовые проводниковые датчики при бесконтактном контроле геометрических размеров различных тел вращения прерывистой конфигурации, например, при контроле формы коллекторов электрических машин, рабочих зазоров, биений и деформаций лопаток ротора турбомашин, авиационных двигателей и т. д.

Для выбора оптимальной конструкции датчика необходимо определить изменение его параметров  $z_{вн}$ ,  $R_{вн}$ ,  $X_{вн}$  в зависимости от геометрических размеров контролируемого устройства и рассчитать электромагнитное поле системы «датчик — контролируемое тело». Таким образом, задача сводится к расчету электромаг-

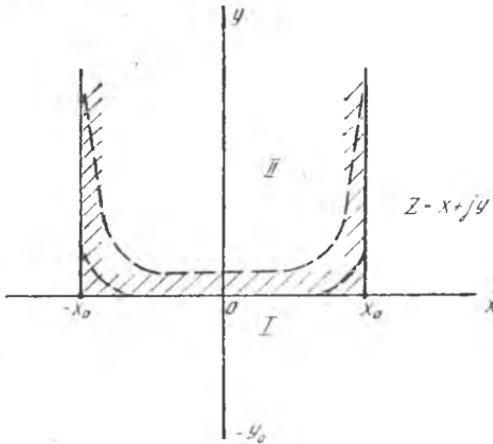


Рис. 1. Электрическая нить над проводящей пластиной

нитного поля провода с током над проводящей пластиной (рис. 1).

Решения подобного рода задач излагаются в работах Бюера Г. А., Сапожникова В. В., Зацепина Н. Н., Кессених В. И., Родигина Н. М., Коробейниковой Н. Е., Жигулина Г. В., Соболева В. С., Шкарлета Ю. М., Герасимова В. Г. и др. [1, 3, 4, 5].

## Постановка задачи и метод решения

(Рис. 1). Известны геометрические размеры датчика:  $2r$  — диаметр провода и  $l$  — длина, частота питания  $\omega$  и электрофизические свойства среды ( $\mu_1$  и  $\sigma_1$ ). Требуется рассчитать электромагнитное поле для квазистационарного режима и определить закон изменения составляющих  $H_x$  и  $H_y$  и вносимых параметров:  $Z_{вв}$ ,  $R_{вв}$ ,  $X_{вв}$  в зависимости от расстояния до проводящей поверхности с  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$  шириной  $2x_0 = b$ . Таким образом, нужно решить двухмерную внешнюю краевую задачу. Она решается последовательным применением метода конформных отображений и интегральных преобразований. Непосредственное применение метода интегральных преобразований не позволяет получить решение в простом аналитическом виде. Поэтому на первом этапе решения исходная область  $\Pi$  (полуплоскость) преобразуется в полуплоскость, при этом упрощаются граничные условия, а следовательно, и расчет внешнего электромагнитного поля.

При решении задачи сделаны следующие допущения.

- 1) Реальный провод заменяется нитью с тем же током  $I$ , от этого картина внешнего электромагнитного поля не изменится.
- 2) Токами смещения пренебрегаем.
- 3) Расчет ведется для провода бесконечной длины.

### Расчет магнитного поля датчика в зоне контроля

Применяя интеграл Шварца-Кристоффеля для рассматриваемого случая, получим

$$z = A \int_0^W (W+1)^{\frac{1}{2}-1} (W-1)^{\frac{1}{2}-1} dW + B. \quad (1)$$

В результате интегрирования этого выражения

$$z = A \cdot \arcsin W + B. \quad (2)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются из соответствия точек  $(-x; 0)$ ,  $(+x_0; 0)$  — в системе координат  $(x-y)$  и  $(-1; 0)$ ,  $(+1; 0)$  — на плоскости  $W$ . Решив систему уравнений, получим  $B=0$ ;  $A = \frac{2x_0}{\pi}$ . После этого найдем функцию  $W$ , обратную  $Z$ .

$$W = \sin \frac{\pi z}{2x_0} = u + jv. \quad (3)$$

Далее выводим соотношение между координатами  $(x-y)$  и « $u-v$ »

$$u = \sin \frac{\pi \cdot x}{2x_0} \cdot ch \frac{\pi y}{2x_0}, \quad (4)$$

$$v = \cos \frac{\pi \cdot x}{2x_0} \cdot sh \frac{\pi y}{2x_0}.$$

Затем осуществляем преобразование граничных условий при конформном отображении области  $Z$  на  $W$ .

Для системы координат  $(x-y)$  граничные условия:

$$\begin{cases} B_{1y}(y=0) = B_{2y}(y=0) \\ H_{1x}(y=0) = H_{2x}(y=0), \end{cases} \quad (5)$$

для точек на плоскости  $y=0$ ;  $-x_0 \leq x \leq +x_0$

$$\begin{cases} B_{1x}(x = \pm x_0) = B_{2x}(x = \pm x_0) \\ H_{1y}(x = \pm x_0) = H_{2y}(x = \pm x_0); \\ x = \pm x_0, \quad 0 \leq y \leq +\infty \end{cases} \quad (6)$$

для точек на плоскостях

при  $y=0$  }  $v=0$ , т. е. три плоскости  $y=0$  и  $x = \pm x_0$  совмещаются в одну  $v=0$ ,  
 $x = \pm x_0$

при  $\begin{cases} x = -x_0 & u = (-\infty; -1) \\ x = +x_0 & u = (1; +\infty) \end{cases}$

интервалы  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$  соответствуют плоскостям  $x = \pm x_0$ .

Дифференцируя сложную функцию векторного потенциала по  $x$  и  $y$ , получим

$$B_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

$$B_x = -\frac{\partial A}{\partial y} = -\left( \frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Подставляем в (7) и (8) граничные координаты и проделаем необходимые преобразования.

В результате для новой области  $W$  получим граничные условия, соответствующие граничным условиям в заданной области  $Z$  при  $\mu_1 = \mu_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial u} = \frac{\partial A_2}{\partial u} \text{ или } B_{1v} = B_{2v} \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial v} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial v} \text{ или } H_{1u} = H_{2u} \end{cases} \quad (9)$$

на плоскости  $V=0$ .

Таким образом, исходная задача сведена к расчету поля нити с током над проводящим полупространством с граничными условиями (9). Для области  $I$  имеем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial u^2} = 0 \text{ при } \sigma_1 = 0. \quad (10)$$

Отметим, что оно инвариантно относительно конформного преобразования. Для проводящего полупространства  $\Pi$  (рис. 2) имеем эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial u^2} = jk^2 A_2 f(u_1 v), \quad (11)$$

где  $k = \sqrt{\omega \mu_2 \sigma_2}$ .

Это уравнение не решается в общем виде, но для частного случая  $f(u, V) = \text{const}$  оно приводится к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial u^2} = j k_1^2 \bar{A}_2, \quad (12)$$

где  $k_1^2 = k^2 f(u_1 v) = \text{const}$  — новая постоянная величина, полученная из условия  $f(u_1 v) = \beta = \text{const}$ . Постоянную  $\beta$  подбирают так, чтобы этому уравнению соответствовала область достаточно про-

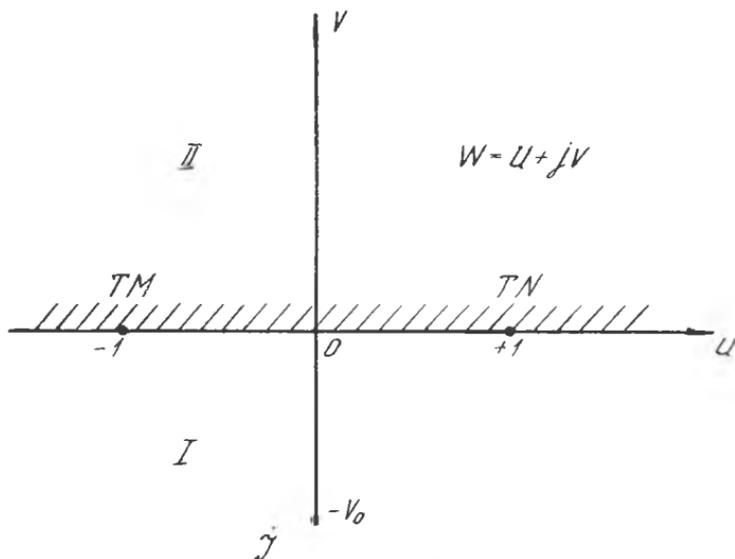


Рис. 2. Конформное отображение полуплоскости на полуплоскость

тяженная по оси  $u$  и имеющая в системе координат  $(x-y)$  поверхность  $\cos^2 \frac{\pi x}{2x_0} + \sin^2 \frac{\pi y}{2x_0} = 1$ , которая с требуемой точностью аппроксимирует форму пластины (рис. 1). Влияние толщины этой поверхности не учитываем, так как она значительно больше глубины проникновения электромагнитной волны в проводящую пластину для рассматриваемого диапазона частот.

Уравнения (10) и (12) решаются методом разделения переменных. С учетом граничных условий (9) получены следующие выражения [1]:

$$A_2 = -\frac{\mu_1 I}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v_0 \lambda - \sqrt{\lambda^2 + j k_1^2}}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + j k_1^2}} \cdot \cos \lambda u d\lambda; \quad (13)$$

$$A_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{(v_0 + v)^2 + u^2} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(v_0 - v)\lambda}}{\lambda} \cos \lambda u d\lambda - \right.$$

$$- 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(v_0-v)\lambda}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + jk_1^2}} \cdot \cos \lambda u d\lambda \quad (14)$$

Окончательно (14) запишем

$$A_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{\frac{(v_0+v)^2 + u^2}{(v_0-v)^2 + u^2}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(v_0-v)\lambda}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + jk_1^2}} \cdot \cos \lambda u d\lambda \right] \quad (15)$$

Определим нормальную и тангенциальную составляющие напряженности внешнего поля

$$H_{1v} = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{u}{(v_0+v)^2 + u^2} - \frac{u}{(v_0-v)^2 + u^2} \right] + \\ + \frac{I}{\pi} \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda(v_0-v)}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + jk_1^2}} \cdot \sin \lambda u \cdot d\lambda; \quad (16)$$

$$H_{1u} = - \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{v_0+v}{(v_0+v)^2 + u^2} + \frac{v_0-v}{(v_0-v)^2 + u^2} \right] + \\ + \frac{I}{2\pi} \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda(v_0-v)}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + jk_1^2}} \cdot \cos \lambda u d\lambda. \quad (17)$$

В выражениях (16) и (17) содержатся несобственные интегралы, взять которые невозможно. Для получения численного результата они вычисляются на ЭВМ разделением на вещественную и мнимую часть. Для приближенного решения представляются в виде ряда и в области сходимости бесконечного ряда берут два или более его члена в зависимости от требуемой точности расчета.

Для определения составляющих напряженности магнитного поля в области I ( $H_{1x}$ ;  $H_{1y}$ ) переходят от системы координат ( $u-v$ ) к ( $x-y$ ), тогда получаются:

1) нормальная составляющая

$$H_{1y} = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = H_{1v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - H_{1u} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (18)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{2x_0} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot ch \frac{\pi y}{2x_0},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\pi}{2x_0} \cdot \sin \frac{\pi x}{2x_0} \cdot sh \frac{\pi y}{2x_0};$$

2) тангенциальная составляющая

$$H_{1x} = - \frac{\partial A_1}{\partial y} = - \left( \frac{\partial A_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left( H_{1v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - H_{1u} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (19)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\pi}{2x_0} \cdot \sin \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\pi}{2x_0} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2x_0}.$$

Таким образом, для определения напряженности магнитного поля в области I (рис. 1) предлагается следующий порядок расчета.

1) По заданным координатам точки  $(X, Y)$  определяются  $u$  и  $v$ .

2) По формулам (16) и (17) рассчитываются значения  $H_{1v}$  и  $H_{1u}$ .

3) По формулам (18)—(19) определяются  $H_{1x}$  и  $H_{1y}$ . На основе этой методики составлена программа и все расчеты выполняются на ЭВМ.

Рассмотрим предельные случаи  $\sigma_2=0$  и  $\sigma_1=\infty$ , т. е.  $k_1^2=0$  и  $k_1^2=\infty$ .

Для  $\sigma_2=0$  будем иметь

$$H_{1u} = -\frac{I}{2\pi} \frac{v_0+v}{(v_0+v)^2+u^2}, \quad (20)$$

$$H_{1v} = \frac{I}{2\pi} \frac{u}{(v_0+v)^2+u^2}. \quad (21)$$

Переходя к системе  $(x-y)$  и преобразуя выражения с учетом однородности пространства (т. е.  $2X_0 \rightarrow \infty$ ), получим известные формулы [1, 4];

Формулы для нормальной и тангенциальной составляющих в системе  $(x-y)$  примут вид

$$H_{1x} = -\frac{I}{4x_0} \left[ \frac{\cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2x_0} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{x_0}}{\left( \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} + \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{2x_0}} + \frac{\cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2x_0} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{x_0}}{\left( \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} - \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{2x_0}} \right]. \quad (22)$$

$$H_{1y} = \frac{I}{4x_0} \left[ \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{x_0} - \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} \cdot \sin \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0}}{\left( \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} + \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{2x_0}} - \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{x_0} + \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} \cdot \sin \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0}}{\left( \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0} - \cos \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2x_0} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi x}{2x_0} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{2x_0}} \right]. \quad (23)$$

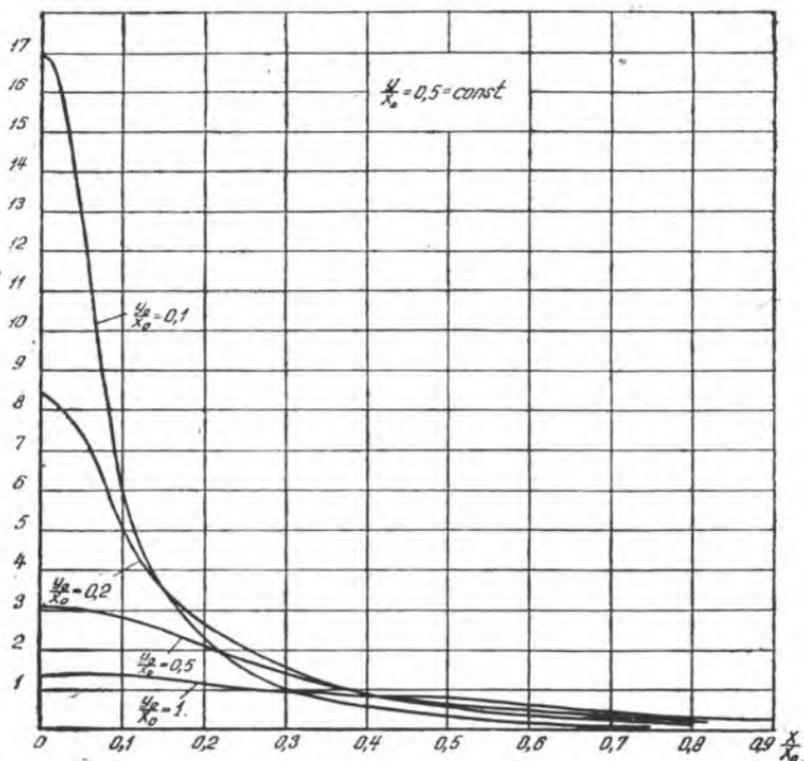
$\frac{H_x}{H_0}$ 

Рис. 3. Зависимости тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля в области I от координаты  $x$  для различных отношений  $\frac{y_0}{x_0}$  при  $\frac{y}{x_0} = 0,5 = \text{const}$

Выражения (22) и (23) применяются для расчета высокочастотного электромагнитного поля датчика или для всех тех случаев, когда  $k = \sqrt{\omega \mu_2 \sigma_2}$  велико.

Отметим, что для случая  $2x_0 \rightarrow \infty$  или  $2x_0 \gg y_0$ , т. е. когда пластину II можно рассматривать как проводящую плоскость неограниченных размеров, формулы (22) и (23) переходят в известные выражения для бесконечного идеально проводящего полупространства [1, 3, 4].

Некоторые результаты расчета составляющих напряженностей магнитного поля при больших значениях «к» приведены на рис. 3, 4, 5, 6. Графики построены в нормированных координатах. Нормировка напряженности выполнена делением на условную напряженность

$$H_0 = \frac{I}{4x_0}.$$

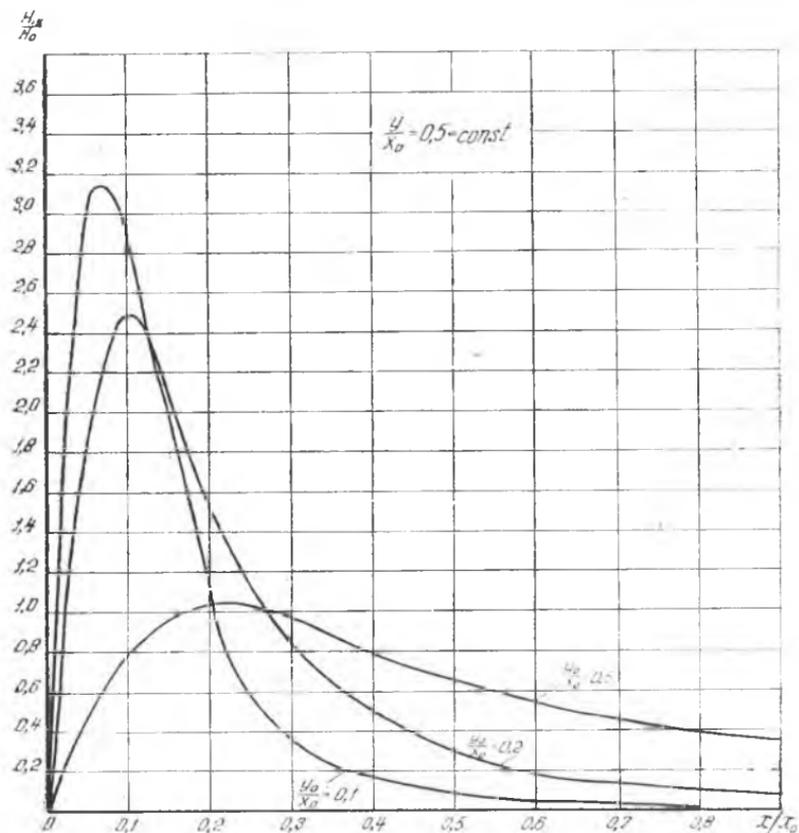


Рис. 4. Зависимости нормальной составляющей напряженности магнитного поля в области I от координаты  $x$  для различных отношений  $\frac{y_0}{x_0}$  при  $\frac{y}{x_0} = 0,5 = \text{const}$

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Характер изменения составляющих напряженности магнитного поля такой же, как для случая бесконечнопроводящего полупространства.

2. С приближением к проводящей пластине значения составляющих напряженности возрастают, максимум нормальной составляющей смещается ближе к оси ординат, а влияние края уменьшается.

3. При значениях  $\frac{y_0}{x_0} < 0,3$  ширина пластины практически не оказывает влияния на закон изменения напряженности магнитного поля. В этом случае для расчетов можно использовать выражения для бесконечнопроводящего полупространства.

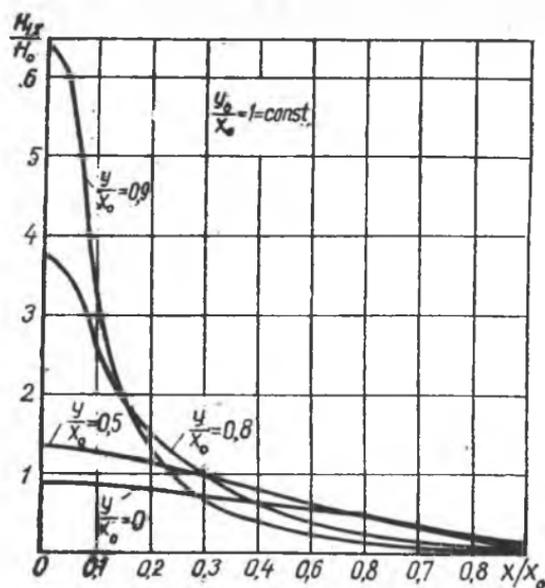


Рис. 5. Зависимости тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля от координаты  $x$  для различных значений  $\frac{y}{x_0}$  при  $\frac{y_0}{x_0} = 1 = \text{const}$

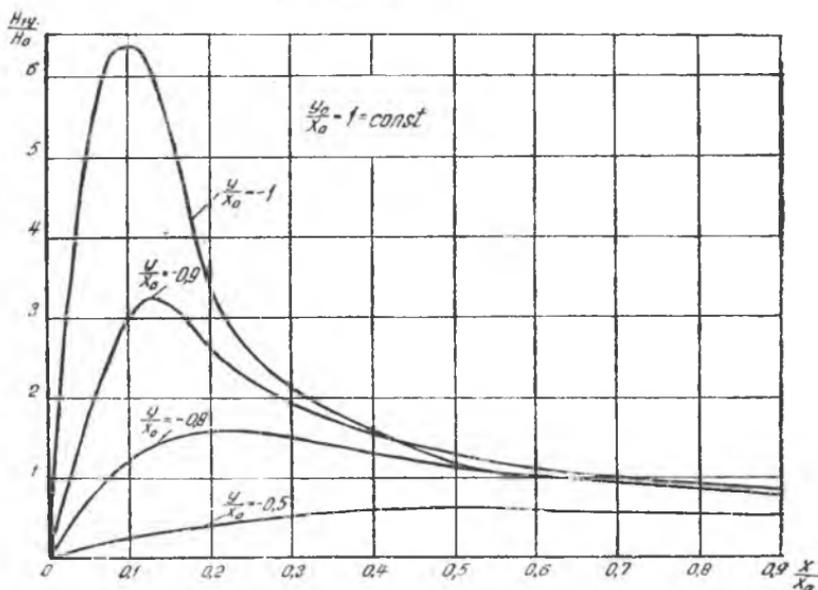


Рис. 6. Зависимости нормальной составляющей напряженности магнитного поля от координаты  $x$  для различных значений  $\frac{y}{x_0}$  при  $\frac{y_0}{x_0} = 1 = \text{const}$

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Штафль. «Электродинамические задачи в электрических машинах», Москва, «Энергия», 1966.
  2. И. Е. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва, ФМ 1963.
  3. Электромагнитные методы контроля качества изделий Вып. 24. Труды ИФМ АН СССР. Свердловск, 1965.
  4. А. Б. Сапожников. Основы электромагнитной дефектоскопии металлических тел. Докторская диссертация, Томск, 1951.
  5. Ученые записки Томского Государственного университета, № 17, Томск. 1952.
- 
-