

Е. Ю. Шерedyкo

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВИТКА

В некоторых источниках, например [1], хорошо изложен вопрос о поле замкнутых кольцевых излучателей. Однако, на практике могут найти применение замкнутые излучатели не кольцевого, а эллиптического профиля. Методика расчета электромагнитного поля таких нитевидных эллиптических колец отсутствует. Поэтому изложение предлагаемой методики в рамках статьи представляет интерес.

Дано нитевидное эллиптическое кольцо (рис. 1), уравнение которого в параметрической форме описывается соотношениями:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Элемент длины кольца $dS = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$,

где $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ — эксцентриситет эллиптического кольца;
 a и b — соответственно большая и малая полуоси.

Для определенности закон распределения тока по кольцу представляем в виде чисто бегущей волны с неизменной амплитудой. Легко проследить, что полученное решение будет справедливо и для ряда других законов распределения тока.

$$I_s = I_0 e^{-j\alpha S(t)},$$

где α — фазовая постоянная, равная $\frac{2\pi}{\lambda}$;

$S(t)$ — текущее значение спрямленной длины эллиптического кольца;

I_0 — ток кольца в точке возбуждения.

На достаточно большом удалении от кольца, т. е. в волновой зоне составляющие вектора потенциала Герца в прямоугольной системе координат определяются соотношениями:

$$P_x = A \int_0^{2\pi} e^{-j\alpha[S(t) - x \cos \varphi \cdot \sin \theta - y \sin \varphi \cdot \sin \theta]} \sin t \cdot dt, \quad (1)$$

$$P_y = B \int_0^{2\pi} e^{-j\alpha[S(t) - x \cos \varphi \cdot \sin \theta - y \sin \varphi \cdot \sin \theta]} \cos t \cdot dt, \quad (2)$$

$$P_z = 0.$$

В этих выражениях приняты обозначения:

$$A = -\frac{a, I_0}{4\pi\epsilon j\omega R} e^{-j\alpha R};$$

$$B = \frac{b I_0}{4\pi\epsilon j\omega R} e^{j\alpha R};$$

θ, φ, R — сферические координаты точки наблюдения M (рис. 1).

Легко проверить, что функция

$$S(t) = \int_0^t dS =$$

$$= a \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

Рис. 1. Эллиптическое кольцо и основные обозначения в прямоугольной и сферической системах координат.

выражающаяся через неполные эллиптические интегралы II рода $E(e, t)$, с высокой степенью точности аппроксимируется функцией

$$S'(t) = a [c_1 t - c^2 \sin 2t] \approx S(t). \quad (3)$$

Здесь

$$c_1 = \frac{2E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi}; \quad c_2 = E\left(e, \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} E\left(e, \frac{\pi}{2}\right).$$

Действительное и аппроксимирующее значения функции $S(t)$ приведены на рис. 2 для двух крайних значений эллиптичности $\frac{b}{a}$, равных единице и нулю. Погрешность аппроксимации в градусной мере не превышает в худшем случае 90° при $\Delta S \leq \frac{\lambda}{4a}$, где λ — длина волны, на которой возбуждается кольцо.

Подставив выражение (3) в формулы (1) и (2), разложив $\sin t$ и $\cos t$ по формулам Эйлера и введя обозначения

$$c_3 = \cos \varphi \cdot \sin \theta, \quad c_4 = \frac{b}{a} \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

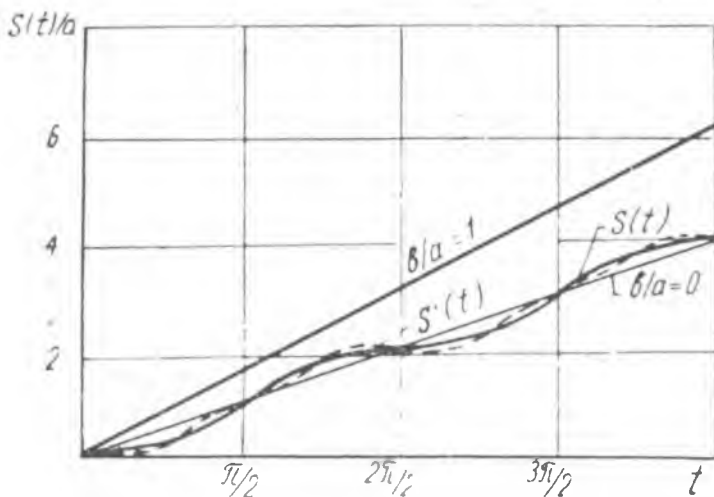


Рис. 2. Действительный и приближенный закон изменения спрямленной длины дуги эллиптического кольца. $S(t)$ —действительный, $S^1(t)$ —приближенный.

для P_x и P_y , получим:

$$P_x = \frac{A}{2j} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{jza} (c_1 \cdot t - c_2 \sin 2t - c_3 \cos t - c_4 \sin t) + jt \cdot dt - \int_0^{2\pi} e^{-jaa} (c_1 \cdot t - c_2 \sin 2t - c_3 \cos t - c_4 \cdot \sin t) - jt \cdot dt \right\}, \quad (4)$$

$$P_y = \frac{B}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-jaa} (c_1 t - c_2 \sin 2t - c_3 \cos t - c_4 \cdot \sin t) - jt \cdot dt + \int_0^{2\pi} -jaa (c_1 t - c_2 \sin 2t - c_3 \cos t - c_4 \sin t) - jt \cdot dt \right\}. \quad (5)$$

Таким образом:

$$P_x = \frac{A}{2j} \{ I_1(c) - I_2(c) \}, \quad P_y = \frac{B}{2} \{ I_1(c) + I_2(c) \},$$

где $I_1(c)$ и $I_2(c)$ — интегральные соотношения первого и второго вида в выражениях (4) и (5).

Раскроем эти интегральные соотношения, произведя ряд преобразований;

$$c_3 \cos t + c_4 \sin t = \xi \cos(t - \tau),$$

$$\xi = \sqrt{c_3^2 + c_4^2} = \sin \Theta \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi},$$

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{c_4}{c_3} = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Используем также хорошо известное разложение по функциям Бесселя:

$$e^{j\alpha z \cos(t-\tau)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(\alpha\alpha z) e^{jm(t-\tau)}.$$

С учетом изложенного для первого и второго интегральных соотношений получим:

$$I_1(c) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(P) e^{-jm\tau} \int_0^{2\pi} e^{-jk_1 t + jz \sin 2t} \cdot dt$$

$$I_2(c) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(P) e^{-jm\tau} \int_0^{2\pi} e^{-jk_2 t + jz \sin 2t} \cdot dt,$$

где

$$p = \alpha\alpha z, \quad z = \alpha\alpha c_2, \quad k_1 = \alpha\alpha c_1 - m - 1, \quad k_2 = \alpha\alpha c_1 - m + 1.$$

Разбив весь интервал интегрирования на четыре участка, через $\frac{\pi}{2}$, и произведя замену переменных, получим:

$$I_1(c) = \frac{1}{2} \pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(P) e^{-jm\tau} \left\{ L_\nu(z) + e^{-j\nu\pi} \cdot L_\nu(-z) + \right. \\ \left. + e^{-j2\nu\pi} \cdot L_\nu(z) + e^{-j3\nu\pi} \cdot L_\nu(-z) \right\}, \quad (6)$$

где

$$L_\nu(z) = I_\nu(z) - jE_\nu(z), \quad k_{1,2} = \nu_1 = \frac{1}{2}(\alpha\alpha c_1 - m - 1);$$

$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta$ — модифицированная функция Бесселя — функция Ангера;

$E_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta$ — модифицированная функция Бесселя — функция Ломмеля-Вебера.

Таблицы этих функций опубликованы в работе [2]. Совершенно аналогичным образом приходим к выводу, что

$$I_2(c) = \frac{1}{2} \pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(p) e^{-jm\tau} \left\{ L_\gamma(z) + l^{-j\gamma\pi} L_\gamma(-z) + \right. \\ \left. + e^{-j2\gamma\pi} L_\gamma(z) + e^{-j3\gamma\pi} L_\gamma(-z) \right\}, \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{k_2}{2} = \frac{1}{2} (\alpha \alpha c_1 - m + 1)$$

и все остальные обозначения прежние.

Подставив (6) и (7) в формулы для P_x и P_y , получим выражения для прямоугольных составляющих вектора потенциала Герца в общем виде. Зная последние, найдем составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_φ применительно к дальней или волновой зоне в сферической системе координат (рис. 3), воспользовавшись известными соотношениями [4].

$$P_\theta = P_x \cos \theta \cdot \cos \varphi + P_y \cos \theta \cdot \sin \varphi + P_z \sin \theta;$$

$$P_\varphi = P_x \sin \varphi + P_y \cos \varphi;$$

$$P_R = P_x \sin \theta \cdot \cos \varphi + P_y \sin \theta \cdot \sin \varphi + P_z \cos \theta;$$

$$E_\theta = -j\omega P_\theta; E_\varphi = -j\omega P_\varphi; E_R = 0.$$

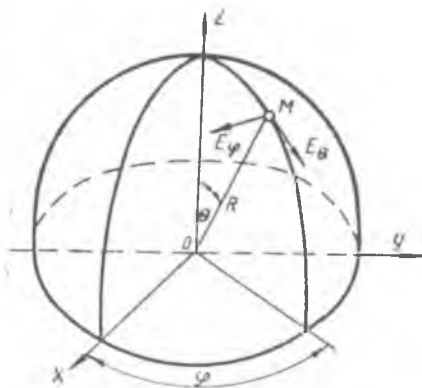


Рис. 3. К определению составляющих напряженности поля.

Для некоторых частных случаев все расчетные соотношения могут быть существенно упрощены. В частности, анализ сумм в скобках выражений (6) и (7) показывает, что при ν и γ равных 0,5; $\pm 1,5$; $\pm 2,5$ и т. д., она превращается в ноль, а при ν и γ равных 0; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 и т. д., сумма становится равной

$$(-1)^{\nu, \gamma} \cdot 4I^{\nu, \gamma}(z).$$

Это обусловлено тем, что функция Ангера при порядке функции, равном целому действительному числу, превращается в функцию Бесселя первого рода целочисленного порядка. Свойства функций Ангера изложены в [3].

Нетрудно показать, что в случае, когда по длине эллиптического кольца укладывается целое число длин волн, ν и γ принимают значения кратные $\pm 0,5$.

Длина эллиптического кольца определяется выражением

$$S(t)_{t=2\pi} = 4aE\left(e, \frac{\pi}{2}\right),$$

где $E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Полагаем, что

$$4aE\left(e, \frac{\pi}{2}\right) = n\lambda.$$

Здесь n — число длин волн, укладывающихся на эллиптическом кольце.

Отсюда

$$a = \frac{n\lambda}{4E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Подставив значения a в формулы для ν и γ , получим:

$$\nu = \frac{1}{2}(n-1-m), \quad \gamma = \frac{1}{2}(n+1-m).$$

Поскольку m принимает целочисленные значения и нуль, значения ν и γ для различного целого числа длин волн, укладывающихся по длине кольца, будут кратными 0,5. Следует отметить, что для нечетного n ν и γ кратны нечетному числу 0,5 при m нечетном, а для n четного ν и γ кратны нечетному числу 0,5 при m четном.

Поэтому

$$I_1(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m e^{-jm\tau} I_m(\rho) I_\nu(z). \quad (8)$$

$$I_2(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m e^{-jm\tau} I_m(\rho) I_\gamma(z). \quad (9)$$

Суммирование производится только по четным значениям m при n — нечетном и по нечетным значениям m при n — четном.

Для главных плоскостей (рис. 3) плоскость xoz ($\varphi=0$) и плоскость $yoз$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) выражения (8) и (9) еще упростятся

для плоскости $\varphi = 0$

$$\tau = 0, \quad e^{-jm\tau} = 1$$

$$I_1(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(\rho) I_\nu(z),$$

$$I_2(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(\rho) I_\gamma(z).$$

Для плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\tau = \frac{\pi}{2}, \quad (j)^m e^{-jm\tau} = 1$$

$$I_1(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} I_m(\rho) I_\nu(z), \quad I_2(c) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} I_m(\rho) I_\gamma(z).$$

Соответственно и составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_φ будут равны:

в плоскости $\varphi = 0$

$$E_\theta = -A\omega\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(\rho) [I_\nu(z) - I_\gamma(z)] \cos\theta.$$

$$E_\varphi = -jB\omega\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (j)^m I_m(\rho) [I_\nu(z) + I_\gamma(z)].$$

$$P = \frac{n \cdot \pi}{2E \left(e, \frac{\pi}{2} \right)} \cdot \sin\theta$$

в плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$E_\theta = -jB\omega\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} I_m(\rho) [I_\nu(z) + I_\gamma(z)] \cos\theta$$

$$E_\varphi = -A\omega\pi \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} I_m(\rho) [I_\nu(z) - I_\gamma(z)]$$

$$P = \frac{n \cdot \pi}{2E \left(e_1, \frac{\pi}{2} \right)} \frac{b}{a} \sin\theta.$$

В качестве иллюстрации применения метода приведем некоторые результаты расчетов полей излучения эллиптического кольца с эллиптичностью, меняющейся от нуля до единицы при условии, что число длин волн, укладываемых на длину кольца, равно единице. Максимальное значение P не превышает 1,57. Поэтому величину m можно ограничить значением, равным 4, при этом погрешность в расчетах будет весьма незначительной.

Ограничив сумму m значением, равным 4, получим:

в плоскости $\varphi = 0$

$$\sum_{m=-4}^{m=+4} (j)^m I_m(\rho) [I_\nu(z) + I_\gamma(z)] \cong I_0(\rho) I_0(z) + I_0(\rho) I_1(z) - I_2(\rho) \cdot I_0(z)$$

$$\sum_{m=-4}^{m=+4} (j)^m I_m(\rho) [I_\nu(z) - I_\gamma(z)] \cong I_0(\rho) I_0(z) - I_0(\rho) I_1(z) + I_2(\rho) \cdot I_0(z)$$

в плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sum_{m=-4}^{m=+4} I_m(\rho) [I_\nu(z) + I_\gamma(z)] \cong I_0(\rho) I_0(z) + I_0(\rho) I_1(z) + I_2(\rho) I_0(z).$$

$$\sum_{m=-4}^{m=+4} I_m(\rho) [I_\nu(z) - I_\gamma(z)] \cong I_0(\rho) I_0(z) - I_0(\rho) I_1(z) - I_2(\rho) \cdot I_0(z).$$

Рассмотрим два предельных случая: $\frac{b}{a} = 0$ и $\frac{b}{a} = 1$.

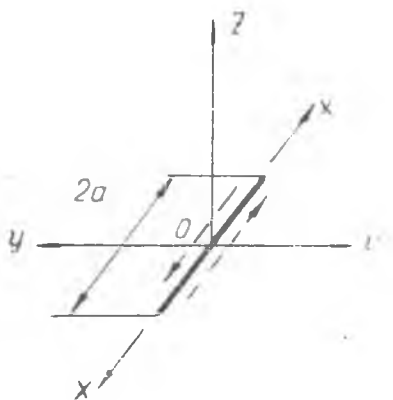


Рис. 4. Эллиптическое кольцо, выродившееся в прямую линию.

В первом случае эллиптическое кольцо вырождается в прямую линию, обтекаемую бегущей волной тока дважды в прямом и обратном направлениях (рис. 4), т. е. в полу-волновый симметричный излучатель.

Во втором случае эллиптическое кольцо переходит в круговое кольцо.

1 случай $\frac{b}{a} = 0$ ($z = 0,320$,

$$\rho = 1,57 \sin \Theta \cdot \cos \varphi)$$

плоскость $\varphi = 0$, $\rho = 1,57 \sin \Theta$

$$E_\Theta = -\omega A \pi [I_0(\rho) I_0(z)$$

$$- I_0(\rho) I_1(z) - I_2(\rho) I_0(z)] \cdot \cos \Theta;$$

$$E_\gamma = 0.$$

плоскость $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 0$.

$$E_\gamma = A \omega \pi [I_0(z) - I_1(z)].$$

$$E_\Theta = 0.$$

Как и следовало ожидать, в плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2}$ напряженность поля не зависит от угла Θ .

2 случай $\frac{b}{a} = 1$ ($z = 0$, $\rho = \sin \Theta$, $B = A$)

плоскость $\varphi = 0$

$$E_\Theta = -A \omega \pi \cdot [I_0(\rho) + I_2(\rho)] \cos \Theta = -2A \omega \pi \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos \Theta$$

$$E_\gamma = -jA \omega \pi [I_0(\rho) - I_0(\rho)].$$

плоскость $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$E_{\theta} = -jA\omega\pi \cdot \cos \theta [I_0(\rho) + I_2(\rho)] = j2A\omega\pi \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos \theta$$

$$E_{\varphi} = -A\omega\pi [I_0(\rho) - I_2(\rho)]$$



Рис. 5. Характер изменения диаграмм направленности при различных значениях эллиптичности кольца.

На графиках рис. 5 показан последовательный характер изменения диаграмм направленности эллиптического кольца при меняющейся эллиптичности. По длине кольца укладывается одна длина волны. Как видно из графиков, меняя эллиптичность кольца, можно в широких пределах изменять степень неравномерности диаграмм направленности в плоскостях

xoz ($\varphi = 0$), xoy ($\theta = \frac{\pi}{2}$),

yoz ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). На рис. 6 при-

ведены графики зависимости степени неравномерности диаграмм направленности в плоскостях $\theta = \frac{\pi}{2}$,

для составляющей напряженности поля E_{φ} и $\varphi = 0$ для составляющей E_{θ} . Степень неравномерности оценивается коэф-

фициентом K .

$$K = \frac{E_{\max} E_{\min}}{E_{\max}^2}$$

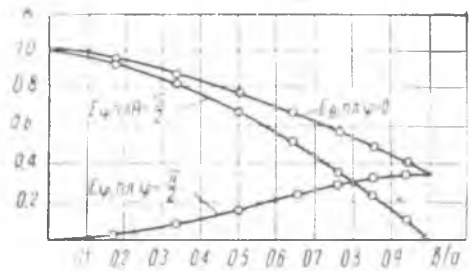


Рис. 6. Графики зависимости степени неравномерности диаграмм направленности от эллиптичности кольца в различных

плоскостях $\theta = \frac{\pi}{2}$; в плоскости $\varphi = 0$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Драбкин, В. А. Зузенко. «Антенно-фидерные устройства», Советское радио. 1961.
 2. Е. Ю. Ш е р е д ь к о. «Направленные свойства антенны в виде прямоугольной несимметричной вырезки параболоида вращения». В кн. Сборник трудов НИИ Министерства связи, выпуск 9/13, 1958.
 3. Г. Н. Ватсон. «Теория Бесселевых функций», том 1. Издательство иностранной литературы, 1949.
 4. С. Рамо, Дж Уинери. «Поля и волны в современной радиотехнике», ГИИТЛ, 1950.
-