

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

При расчете сложных САР целесообразно упрощать уравнения отдельных звеньев, которые могут иметь высокий порядок. Часто такое упрощение проводится необоснованно за счет отбрасывания малых постоянных времени, входящих в систему.

В ряде работ [1], [2], [3] была сделана попытка создать методику понижения порядка уравнений, описывающих систему. В этих работах отыскивается характеристическое уравнение порядка m , в каком-либо смысле наиболее близкое к исходному характеристическому уравнению порядка $n > m$, то есть задача решается не в области оригиналов, а в области изображений.

Малым погрешностям в области изображения, как правило, соответствуют значительные погрешности оригинала. Приведенные в работах примеры приближений достаточно очевидно засвидетельствовали этот факт (см. рис. 1 [1] и рис. 2 [2]).

Проделанный эксперимент на аналоговой вычислительной машине показал, что для тех же исходных кривых, которые выбирались авторами работ [1], [2], можно получить меньшие ошибки при приближении уравнениями тех же порядков.

Для получения меньших ошибок естественно приближать не характеристические уравнения, а сами переходные процессы. В методе, разработанном В. А. Тимофеевым [4], все вычисления проводятся в области оригинала, но на уменьшение точности влияет применяемый метод наименьших квадратов и произвольность выбора t_i .

Поэтому сформулируем задачу так: имеется система, описываемая линейным дифференциальным уравнением порядка « n »

$$\begin{aligned}
 a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = \\
 = b_0 \frac{d^k x(t)}{dx^k} + b_1 \frac{d^{k-1} x(t)}{dx^{k-1}} + \dots + b_k x(t).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

и при определенных начальных условиях характеризуемая переходным процессом $y(t)$. Необходимо найти другую систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением порядка $m < n$, так, чтобы минимизировать некоторый функционал I , зависящий от разности $y(t) - u_{\text{прибл.}}(t)$.

В настоящее время наиболее широкое применение имеет квадратичный функционал

$$I_1 = \int_0^T [y(t) - u_{\text{прибл.}}(t)]^2 dt, \quad (2)$$

где T — время, достаточное для практически полного затухания переходного процесса;

$u_{\text{прибл.}}(t)$ — переходный процесс в искомой приближающей системе.

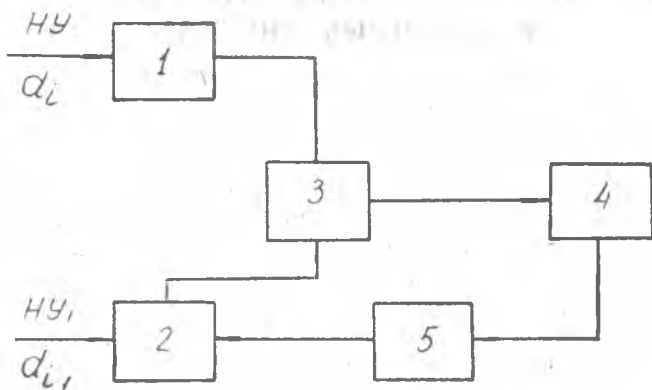


Рис. 1.

1 — аналоговое вычислительное устройство для получения исходного переходного процесса; 2 — аналоговое вычислительное устройство для получения приближающего переходного процесса; 3 — сумматор; 4 — осциллограф; 5 — оператор. НУ и НУ₁ — начальные условия соответственно исходной и приближающей систем. a_i и a_{i1} — коэффициенты дифференциальных уравнений соответственно исходной и приближающей систем.

Это вызвано, по-видимому, тем, что исследование квадратичных функционалов наиболее просто с точки зрения математической. Как известно, решение линейного дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (3)$$

где C_i — постоянные интегрирования;

λ_i — корни соответствующего характеристического уравнения.

В уравнении (2) неизвестными являются коэффициенты C_i и показатели λ_i приближающего процесса. Они определяются из систе-

мы уравнений, получаемой при взятии частных производных от уравнения (2) по неизвестным коэффициентам и показателям:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^{\infty} [y(t) - y_{\text{прибл.}}(t)]^2 dt = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_0^{\infty} [y(t) - y_{\text{прибл.}}(t)]^2 dt = 0 \quad (4)$$

Ниже выявляются факторы, позволяющие сделать оценку получаемому приближению.

Для исходного уравнения, сведенного к однородному, как это указано в [6], справедливо

$$-a_0 y(t) = a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t)$$

Интегрируются обе части в пределах от 0 до ∞ .

$$-\int_0^{\infty} a_0 y(t) dt = \int_0^{\infty} a_1 y'(t) dt + \int_0^{\infty} a_2 y''(t) dt + \dots + \int_0^{\infty} a_n y^{(n)}(t) dt$$

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = \frac{a_1}{a_0} y(t) \Big|_0^{\infty} + \frac{a_2}{a_0} y'(t) \Big|_0^{\infty} + \dots + \frac{a_n}{a_0} y^{(n-1)}(t) \Big|_0^{\infty}$$

Таким образом, интеграл

$$\int_0^{\infty} y(t) dt.$$

зависит от коэффициентов характеристического уравнения и начальных и конечных условий.

Для характеристического уравнения более низкого порядка, нежели исходное, выберем произвольно коэффициенты, а начальные и конечные условия выберем так, чтобы

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = \int_0^{\infty} y_{\text{прибл.}}(t) dt.$$

Так как это возможно, то естественно сделать вывод о том, что при фиксированных λ_i

$$\int_0^{\infty} [y(t) - y_{\text{прибл.}}(t)]^2 dt$$

есть функция лишь от начальных и конечных условий исходного и приближающего процессов. Поскольку начальными и конечными условиями определяются лишь постоянные интегрирования C_i уравнения (3), то для выполнения условия минимизации (2) достаточно варьировать лишь ими. Конечно, возможности лучшего приближения таятся в варьировании одновременно и коэффициентами C_i и показателями λ_i уравнения (3).

Наконец, заметим, что квадратичная оценка позволяет определить приближающую кривую, для которой минимальна (по сравне-

нию с другими кривыми с таким же числом составляющих $C_i e^{\lambda_i t}$ сумма квадратов разностей в каждой точке t_i . Но в отдельных точках при этом разность квадратов может оказаться значительной и соответственно значительным расстояние.

Поэтому ставим задачу следующим образом. Из всех кривых, полученных из задаваемого количества составляющих вида $C_i e^{\lambda_i t}$ найти ту, у которой будет минимальна максимальная разность $|y(t) - u_{\text{прибл.}}(t)|$. Эта разность явится реальной оценкой степени приближения. Обозначим известные параметры исходной кривой C_i и λ_i через a , а неизвестные параметры приближающей кривой C_{1i} и λ_{1i} через x . Тогда

$$y(t) - u_{\text{прибл.}}(t) = f_1(a, x, t).$$

Пусть

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = f_2(a, x, t) = 0$$

Из последнего уравнения определяются те значения t , которые соответствуют экстремумам разности $y(t)$ и $u_{\text{прибл.}}(t)$;

$$t_{\text{экстр.}} = f_3(a, x, t) \tag{5}$$

Нас интересуют те значения x , которые определяют минимум функции f_1 в этих точках. Для определения этих значений составляем систему уравнений, принимая частные производные по каждому из неизвестных C_i, λ_i в точках, где функция f_1 экстремальна:

$$f_{\text{экстр.}}(a, x, t) = f_1[a, x, f_3(a, x)]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial C_i} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_i} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Система (6) может иметь множество решений. Каждое из них должно быть дополнительно исследовано с целью выбора решений, соответствующих $\min_{C_i, \lambda_i, t} \max f_1$.

Решению задачи препятствует то обстоятельство, что $t_{\text{экстр.}}$ затруднительно выразить в явном виде согласно формуле (5). Действительно, функция $f_2(a, x, t)$, из которой определяется $t_{\text{экстр.}}$, может быть представлена составляющими того же вида, что и функция $f_1(a, x, t)$, то есть

$$\sum C_i e^{\lambda_i t},$$

откуда затруднительно выразить t как функцию $\overline{C_i \lambda_i}$.

Если применить для целей решения этой задачи аналоговую вычислительную машину, то на осциллографе могут быть получены значения $f_{\text{экстр.}}(a, x, t)$, как максимальные значения разности функ-

ций $y(t)$ и $y_{\text{прибл}}(t)$. При этом на аналоговой машине набираются дифференциальные уравнения, описывающие исходную и приближающую системы. Разность решений подается на вход осциллографа (рис. 1).

В дальнейшем необходимо среди всех $f_{\text{экстр}}(a, x, t)$ выделить $\max |f_{\text{экстр}}(a, x, t)|$ и, варьируя коэффициентами дифференциального уравнения $0 \leq t \leq T$ приближающей кривой, получить

$$\min \max |f_{\text{экстр}}(a, x, t)|.$$

$C_i \lambda_i t$

Однако в процессе изменения коэффициентов может получиться, что минимизируемый максимум становится равным одному из других (все время меняющихся) максимумов. Если на следующем шаге изменения коэффициентов окажется, что два указанных максимума продолжают меняться в разных направлениях, то процесс поиска следует приостановить и зафиксировать то значение, при котором максимумы равны.

В зависимости от исходных коэффициентов дифференциального уравнения и начальных условий изображающая точка в пространстве коэффициентов и начальных условий будет попадать в область притяжения того или иного максимума. Но нас интересует лишь один из них, а именно тот, который минимизируется наилучшим образом, то есть позволяет получить минимальным максимальное отклонение приближающей кривой от исходной.

К настоящему времени разработаны глобальные оптимизаторы [5], способные с определенной вероятностью находить $\max f_{\text{экстр}}$ заданной функции. Величина этой вероятности зависит от числа максимумов и числа поисков (при каждом поиске могут произвольно задаваться коэффициенты приближающей кривой и начальные условия):

$$q = \left(\frac{r-1}{r-1+\alpha} \right)^n$$

где q — величина вероятности;

r — число максимумов;

α — вероятность попадания в $\max f_{\text{экстр}}$ относительно средней вероятности попадания в остальные максимумы.

Отметим, что весь процесс минимизации ведется по кривым переходного процесса — исходной и приближающей, а не по коэффициентам дифференциальных уравнений.

Все сказанное может оказаться полезным при проектировании прибора автоматического поиска приближений для исследования переходных процессов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Каляев. Расчет переходного процесса в линейных системах методом понижения порядка дифференциального уравнения. «АИТ», № 9, 1959.
 2. В. Ф. Жевержеев. Приближенное вычисление переходных функций по мнимой части изображения. «Электромеханика», № 2, 1964.
 3. И. А. Огурк. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. Изд-во «Наука», 1965.
 4. В. А. Тимофеев. Теория и практика анализа результатов наблюдений над техническими объектами, работающими в эксплуатационных условиях. Ленинград, 1960.
 5. И. Н. Бочаров, А. А. Фельдбаум. Автоматический оптимизатор для поиска минимального из нескольких минимумов (глобальный оптимизатор). «АИТ», № 3, 1962.
 6. Г. А. Саркисов. «Об эквивалентности возмущенной и невозмущенной линейных САР», настоящий сборник, стр. 251.
-