К. Д. Колесников, Е. А. Климушкин

ПОГРЕШНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕРПОЛЯТОРА ПРИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ОКРУЖНОСТИ

В инструкции по ручному программированию обработки деталей на станках с программным управлением, разработанной ЭНИИМСом приводятся результаты статистического анализа профилей изделий наиболее часто встречающихся в металлообрабатывающей промышленности. Эти данные, а также другие отечественные и зарубежные источники говорят о том, что 95% профилей обрабатываемых деталей представляют собой окружности, сопряжение дуг окружности и сопряжение дуг окружности с прямыми.

На станках с программным управлением имеются интерполяторы, которые позволяют получить координаты промежуточных точек между опорными, заданными программой. Все интерполяторы можно разделить на два класса. Одни из них работают с равными интервалами интерполирования, другие — с неравными.

В данной статье рассматривается сравнение этих двух классов интерполяторов по точности интерполирования окружности линейным интерполятором.

Рассмотрим погрешность линейного интерполятора при интерполировании окружности для случая, когда опорные точки задаются через равные интервалы по одной из осей координат. Из рис. 1 легко заметить, что наибольшая погрешность будет на участке, который находится в начале интерполирования (участок AB). Эта погрешность определится выражением (1).

$$\beta_{max} = R - h = R - R\sin\varphi = R(1 - \sin\varphi). \tag{1}$$

В свою очередь:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \tag{2}$$

где k коэффициент наклона интерполирующей прямой в начале интерполирования может быть определен из выражения (3).

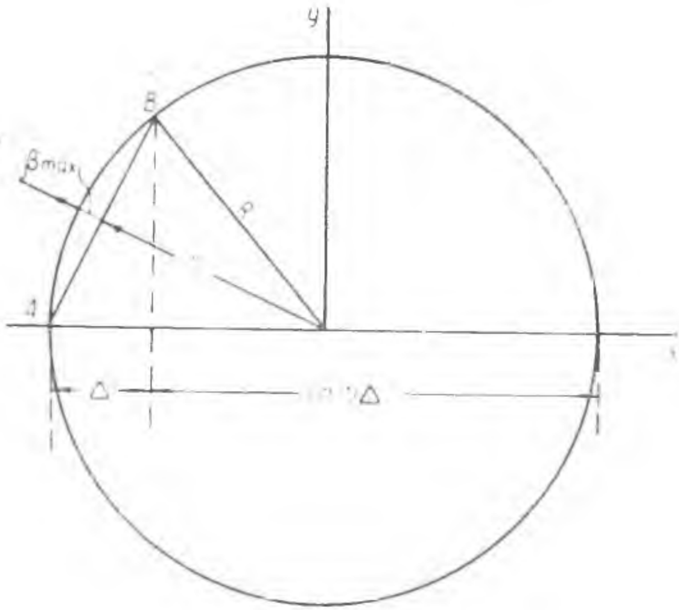

Рис. 1.

$$k = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\Delta} = \frac{\sqrt{R^2 - (R - \Delta)^2}}{\Delta} \tag{3}$$

Если диаметр D разбит на n равных интервалов Δ, то

$$\Delta = \frac{2R}{n}. \tag{4}$$

Подставив значение Δ из (4) в (3), получим:

$$k = \frac{\sqrt{R^2 - \left(R - \frac{2R}{n}\right)^2}}{\frac{2R}{n}} = \sqrt{n - 1}. \tag{5}$$

Полученное значение k подставим в выражение (2), а значение $\sin\varphi$ подставляем из выражения (2) в (1). В результате получаем выражение абсолютной погрешности в зависимости от количества интервалов интерполирования и радиуса окружности:

$$\beta_{max} = R\left[1 - \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}\right] = R\left[1 - \sqrt{\frac{n - 1}{n}}\right]. \tag{6}$$

Относительная погрешность для этого случая

$$\sigma_{max} = \frac{\beta_{max}}{R} = 1 - \sqrt{\frac{n - 1}{n}}. \tag{7}$$

Для больших значений n подкоренное выражение может быть разложено в ряд, при этом

$$\sigma_{max} \cong \frac{1}{n} - \frac{1}{2!\ n^2} + \frac{1}{3!\ n^3} \quad \ldots . \tag{8}$$

Рассмотрим второй случай, при котором по оси x выбираются такие неравные интервалы интерполирования, при которых дуги на участках интерполирования имеют одинаковую величину.

Согласно рис. 2 максимальная погрешность может быть определена из выражения (9):

$$\beta_{max} = R - h = R - R \operatorname{Cos} \varphi = R\left(1 - \operatorname{Cos} \frac{\pi}{n_1}\right) = 2R \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{n_1}, \tag{9}$$

где n_1 — количество сторон правильного n_1-угольника, вписываемого в окружность, сторона которого равна интервалу интерполирования, а R — радиус интерполируемой окружности.

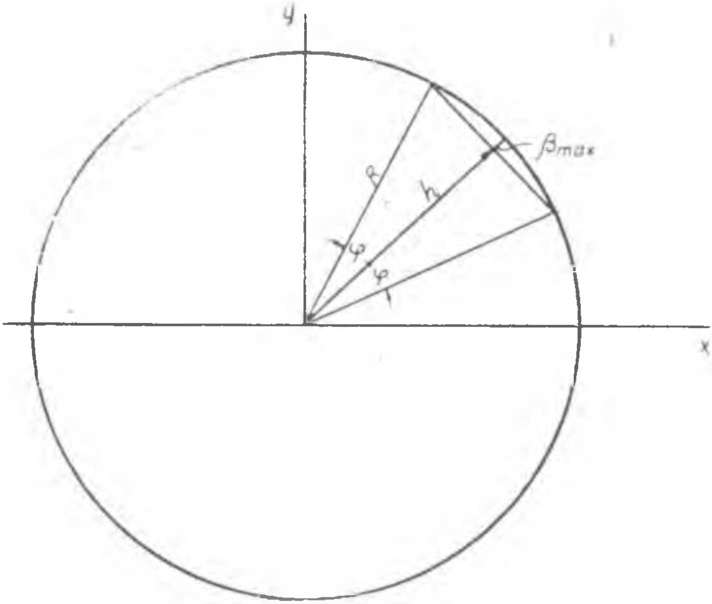

Рис. 2.

Относительная погрешность для этого случая определится как

$$\sigma_{max} = \frac{\beta_{max}}{R} = 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{2n_1} \tag{10}$$

или, приближенно,

$$\sigma_{max} \cong 2\left(\frac{\pi}{2n_1}\right)^2. \tag{10'}$$

При расчете интерполяторов иногда решается обратная задача, т. е. по заданной относительной погрешности требуется найти такое число интервалов n_1, при котором максимальная погрешность не превышает допустимой. Рассмотрим этот случай. Из рис. 2 следует, что

$$\frac{\Delta}{2R} = \sin\frac{\pi}{n_1} = 2\sin\frac{\pi}{2n_1}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{2n_1}}. \qquad (11)$$

Из выражения (10) следует, что

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2n_1} = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{2}}. \qquad (12)$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{n_1} = \arcsin\sqrt{\frac{\sigma_{max}}{2}}, \qquad (13)$$

или

$$n_1 = \frac{\pi}{2\arcsin\sqrt{\frac{\sigma_{max}}{2}}}. \qquad (14)$$

Например, при заданной относительной погрешности $\sigma_{max} = 0{,}01$ (т. е. 1%) количество интервалов интерполирования определяется как

$$n_1 = \frac{\pi}{2\arcsin\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2\arcsin 0{,}0707} = 22{,}6, \qquad (15)$$

т. е. для обеспечения заданной точности интерполирования, при которой погрешность не превышает 1%, необходимо, чтобы число интервалов было не меньше двадцати трех.

Сравним полученные данные с интерполятором, интерполирующим ту же окружность через одинаковые интервалы (индекс I будем относить к равноинтервальному интерполятору, а индекс II — к неравноинтервальному).

Для интерполятора II количество интервалов будет в два раза больше:

$$n' = 2n. \qquad (16)$$

Разложив в ряд выражение относительной погрешности интерполятора II, получим:

$$\sigma_{max\,II} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \cong \frac{\pi^2}{2!\,(2n)^2} - \frac{\pi^4}{4!\,(2n)^2}. \qquad (17)$$

В свою очередь, относительная погрешность интерполятора I имеет значение:

$$\sigma_{max\,I} \cong \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2n}\right)^2\right]. \qquad (18)$$

Для случаев $n \gg 1$, а это всегда так, выражение (17) можно ограничить только первым членом разложения. Тогда:

$$\sigma_{\max II} \simeq \frac{\pi}{2!\,(2n)^2} \tag{19}$$

или

$$\sigma_{\max I} \simeq \frac{\pi^2}{2^3}\,\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{1}{n^2}. \tag{20}$$

Если из выражения (20) определить n и подставить его в выражение (19), то получим зависимость

$$\sigma_{\max I} \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{2\sigma_{\max II}}}{\pi} + \frac{8}{4\pi^2}\,\sigma_{\max II}\right]. \tag{21}$$

Например, при $\sigma_{\max II} = 0{,}01$, т. е. 1%

$$\sigma_{\max I} = \left[\frac{\sqrt{2}\cdot 0{,}01}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}\,0{,}01\right] \simeq 0{,}0472,$$

т. е. $\sigma_{\max I}$ будет составлять $\sigma_{\max I} = 4{,}72\%$.

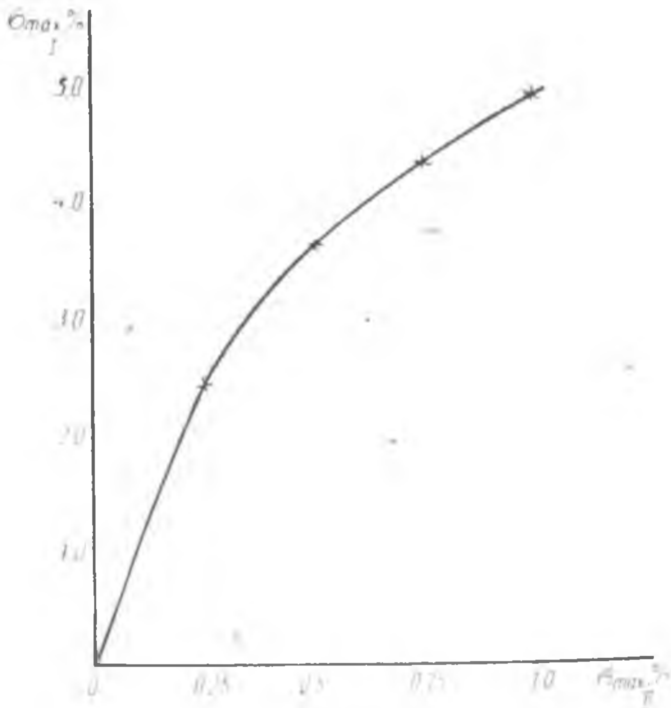

Рис. 3.

Количество интервалов n при этом может быть определено из формулы:

$$n = \frac{\pi}{2\sqrt{2\sigma_{max}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2 \cdot 0{,}01}} = 11{,}2.$$

Для наглядности на стр. 277 (рис. 3) приводится кривая зависимости $\sigma_{max_1} = f(\sigma_{max_н})$. Из этой кривой следует, что при прочих равных условиях применение интерполятора, позволяющего производить интерполирование через неравные промежутки (при постоянных дугах на участке интерполирования) всегда предпочтительнее, т. к. во много раз уменьшается погрешность интерполирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелинян, Вульфсон, Зусман и др.
Инструкция по ручному программированию обработки деталей на станках с программным управлением. Издание гос. комитета Совета Министров СССР по автоматике и машиностроению. Москва — 1961.