Ю. М. Мотрохин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ЛОМАНОЙ ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

При эксплуатации универсальных функциональных преобразователей одной или нескольких переменных большое значение имеет правильная настройка блока. В настоящей статье рассматривается один из возможных способов определения значений настраиваемых параметров по минимуму среднеквадратичной погрешности.

Вначале рассмотрим построение аппроксимирующей кривой, кусочногладкой, состоящей из отрезков полиномов степени не выше m. Число отрезков n. Запишем выражение для среднеквадратичной погрешности.

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_n} [q(x) - f(x)]^2. \tag{1}$$

Здесь I — среднеквадратичная погрешность;
$q(x)$ — аппроксимирующая кривая;
$f(x)$ — аппроксимируемая функция;
$[x_0\ x_n]$ — интервал определения $f(x)$.

Относительно $f(x)$ сделаем предположение, что она суммируема с квадратом на сегменте $[x_0\, x_n]$.

Выражение для $q[x]$ может быть записано следующим образом

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{is}\, x^s \delta(x). \tag{2}$$

где

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x_{i-1} < x < x_i; \\ 0 \text{ при } x_i < x < x_{i-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Продифференцируем выражение для погрешности по параметру и значения производных приравняем нулю

$$\frac{\partial I}{\partial a_{si}} = 2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [q_i(x) - f(x)]\, x^s dx = 0. \tag{4}$$

Здесь $q_i(x)$ получается из $q(x)$ при фиксированном i. После несложных преобразований получим

$$a_{mi} \frac{x_i^{m+s+1} - x_{i-1}^{m+s+1}}{m+s+1} + a_{m-1,\, i} \frac{x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1}}{m+1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{0i} \frac{x_i^{s+1} - x_{i-1}^{s+1}}{s+1} = M_{si}\,, \tag{5}$$

где

$$M_{si} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} x^s f(x)\, dx.$$

Так как s принимает значение 0,1 ..., то для каждого значения i мы получаем $m+1$ уравнение, из которых определяются коэффициенты a_{si}.

Придавая i значения 1, 2 . . . n, можно получить n систем уравнений для отыскания коэффициентов аппроксимирующих полиномов на каждом интервале в отдельности.

Рассмотрим теперь построение аппроксимирующей гиперповерхности для функции трех переменных.

Уравнение аппроксимирующей поверхности, состоящей из отрезков плоскостей, имеет вид:

$$q(x_1 y_1 z) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{l} (\alpha_{ijk} x + \beta_{ijk} y + \gamma_{ijk} z + \delta_{ijk}) \vartheta_{ijk}(x_1 y_1 z), \tag{7}$$

где

$$\vartheta_{ijk}(x_1 y_1 z) = \begin{cases} 1 \text{ при } x_{i-1} x < x_i \; y_{i-1} < y < y_j z_{k-1} < z < z_k \\ 0 \text{ при } x_i < x < x_{i-1} \; y_j < y < y_{j-1} z_k < z < z_{k-1} \end{cases}. \tag{8}$$

Здесь p, q, l — число интервалов, на которые разбита область аппроксимации по осям x. y, z соответственно.

Формула для определения среднеквадратичной погрешности имеет вид

$$I = \iiint\limits_G [q(x_1 y_1 z) - f(x_1 y_1 z)]^2\, dxdydz. \tag{9}$$

Здесь I - среднеквадратичная погрешность;

G — область определения функции $f(x. y. z)$.

Дифференцируя I по α_{ijk} и приравнивая полученное значение производной нулю получим

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_{ijk}} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_l} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} [\alpha_{ijk}x + \beta_{ijk}y + \gamma_{ijk}z + \delta_{ijk} - - f(x_1 y_1 z)]\, xdxdydz = 0. \tag{10}$$

Отсюда

$$\gamma_{ijk}\frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{3}(y_j - y_{j-1})(z_R - z_{R-1}) + \beta_{ijk}\frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}\frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2}$$

$$(z_k - z_{k-1}) + \gamma_{ijk}\frac{x_k^2 - x_{i-1}^2}{2}(y_j - y_{j-1})\frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} +$$

$$+ \delta_{ijk}\frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}(y_j + y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) = M_{ijk}^{(x)}, \tag{11}$$

где

$$M_{ijk}^{(x)} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} xf(x_1 y_1 z)\, dxdydz. \tag{12}$$

Проделав аналогичные операции для β_{ijk}; γ_{ilk}; δ_{ijk}, получим уравнения вида

$$\alpha_{ijk}\frac{x_i^2 - x_{i-j}^2}{2}\frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2}(z_\kappa - z_{\kappa-1}) +$$

$$+ \beta_{ijk}(x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{y_j^3 - y_{j-1}^3}{3}(z_\kappa - z_{\kappa-1}) +$$

$$+ \gamma_{ijk}(x_i - x_{i-1})\frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2}\frac{z_\kappa^2 - z_{\kappa-1}^2}{2} +$$

$$+ \delta_{ijk}(x_i - x_{i-1})\frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2}(z_\kappa - z_{\kappa-1}) = M_{ilk}^{(y)}. \tag{13}$$

$$\alpha_{ijk}\frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}(y_j - y_{j-1})\frac{z_\kappa^2 - z_{\kappa-1}^2}{2} +$$

$$+ \beta_{ijk}(x_i - x_{i-1})\frac{y_j^2 - y_{j-1}^2}{2}\frac{z_\kappa^2 - z_{\kappa-1}^2}{2} +$$

$$+ \gamma_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\frac{z_\kappa^3 - z_{\kappa-1}^3}{3} +$$

$$+ \delta_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\frac{z_\kappa^2 - z_{\kappa-1}^2}{2} = M_{ijk}^{(z)}. \tag{14}$$

$$\alpha_{ijk}\frac{x_i^2-x_{i-1}^2}{2}\left(y_j-y_{j-1}\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)+$$

$$+\beta_{ijk}\left(x_i-x_{i-1}\right)\frac{y_j^2-y_{j-1}^2}{2}\left(z_k-z_{k-1}\right)+$$

$$+\gamma_{ijk}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(y_j-y_{j-1}\right)\frac{z_k^2-z_{k-1}^2}{2}+$$

$$+\delta_{ijk}\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(y_j-y_{j-1}\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)=M_{ijk}. \tag{15}$$

Здесь

$$M_{ijk}^{(y)}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} yf\left(x_1 y_1 z\right)dxdydz$$

$$M_{ijk}^{(z)}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} zf\left(x_1 y_1 z\right)dxdydz. \tag{16}$$

$$M_{ijk}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} f\left(x_1 y_1 z\right)dxdydz.$$

Уравнения (11), (13), (14), (15) образуют систему. из которой могут быть определены искомые параметры α_{ijk}; β_{ijk}; γ_{ijk} и δ_{ijk}. Придавая i, j, k все значения мы получим pql систем уравнений, полностью определяющих искомую ломаную поверхность.

При построении аппроксимирующей ломаной изложенным выше методом в некоторых случаях ломаная может претерпевать разрыв 1-го рода в точках излома.

Действительно, рассмотрим, например, построение аппроксимирующей ломаной, состоящей из двух отрезков прямых. Запишем выражение для погрешности.

$$I=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_1}\left[a_i x+b_i-f\left(x\right)\right]^2 dx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left[a_{i+1}x+\right.$$

$$\left.+b_{i+1}-f\left(x\right)\right]^2 dx. \tag{17}$$

Дифференцируя (17) по искомым параметрам и приравнивая к нулю значения производных, получим

$$a_i\frac{x_i^3-x_{i-1}^3}{3}+b_i\frac{x_i^2-x_{i-1}^2}{2}=M_{1,i}.$$

$$a_i\frac{x_i^2-x_{i-1}^2}{2}+b_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=M_{0,i}. \tag{18}$$

$$a_{a+i}\frac{x_{i+1}^3-x_i^3}{3}+b_{i+1}\frac{x_{i+1}^2-x_i^2}{2}=M_{1,i+1}.$$

$$a_{i+1}^2\frac{x_{i+1}^2-x_i^2}{2}+b_{i+1}(x_{i+1}-x_i)=M_{0,i+1}.$$

Здесь

$$M_{1,i}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}xf(x)\,dx\quad M_{0,i}=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,dx.$$

$$M_{1,i+1}=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}xf(x)\,dx\qquad M_{0,i+1}=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx. \tag{19}$$

Условием непрерывности ломаной в точке излома является равенство

$$a_i\,x_i+b_i=a_{i+1}\,x_i+b_{i+1}. \tag{20}$$

Предположим, что оба интервала равны между собой

$$x_i-x_{i-1}=x_{i+1}-x_i=h. \tag{21}$$

Тогда, определив из системы (18) значения коэффициентов и подставив их значения в (20) с учетом (21), получим

$$M_{1,i}-\left(x_i-\frac{2}{3}h\right)M_{0,i}=-M_{1,i+1}+\left(x_i+\frac{2}{3}\,h\right)M_{0,i+1}. \tag{22}$$

Сделаем также предположение, что функция $f(x)$ — нечетная относительно точки x_i на интервале $[x_{i-1},\ x_{i\pm1}]$.
В этом случае

$$M_{1,i}=M_{1,i+1};\ M_{0,i}=-M_{0,i+1}. \tag{23}$$

Поэтому равенство (22) принимает вид

$$M_1=\frac{2}{3}hM_0 \tag{24}$$

или

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}xf(x)\,dx-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{2}{3}hf(x)\,dh=0. \tag{25}$$

Отсюда

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(x-\frac{2}{3}h\right)f(x)\,dx=0. \tag{26}$$

Равенство (26), являющееся условием неразрывности аппроксимирующей ломаной $\varphi(x)$ в точке x_i, должно выполняться при любых $f(x)$, что невозможно.

Следовательно, в этом случае аппросимирующая ломаная терпит разрыв в точке излома.

В связи с тем, что в некоторых случаях аппроксимация разрывной функцией нежелательна, встает вопрос об отыскании непрерывной аппроксимирующей ломаной.

Пусть дана функция $f(x)$, интегрируемая на интервале $[x_0, x]$. Требуется определить параметры аппроксимирующей ломаной $q(x)$, состоящей из отрезков полиномов степени не выше m, так, чтобы среднеквадратичная погрешность была наименьшей, при условии, что аппроксимирующая ломаная является непрерывной.

Для отыскания параметров ломаной используется метод неопределенных множителей Лагранжа.

Составим функцию

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_n} [q(x) - f(x)]^2\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left[\sum_{s=0}^{m} a_{si}\, x_i^s - \sum_{s=0}^{m} a_{s,\, i+1}\, x_i^s \right]. \qquad (27)$$

Здесь $q(x)$ — аппроксимирующая ломаная.

$$q(x) = \sum_{s=0}^{m} a_{si}\, x^s \cdot \delta_i(x), \quad \delta_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x_{i-1} < x < x_i \\ 0 \text{ при } x_i < x < x_{i-1} \end{cases};$$

λ_i — неопределенные множители.

$$\sum_{s=0}^{m} a_{si} x_i^s = \sum_{s=0}^{m} a_{s,\, i+1} x_i^s \quad i = 1,\ 2 \cdots n-1. \qquad (28)$$

Уравнение (28) является условием непрерывности искомой кривой в точке излома.

Для определения искомых параметров продифференцируем (27) по a_{si} и полученные значения производных приравняем нулю. Полученные при этом $(m+1)n$ уравнений совместно с $n-1$ уравнением вида (28) позволяют определить все искомые параметры.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{si}} = 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi} x^m + a_{m-1,\, i} x^{m-1} + \cdots + a_{si} x^s + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,\, i}\, x + a_{0,\, i} - f(x)]\, x^s\, dx - \lambda_{i-1} x_{i-1}^s + \lambda_i\, x_i^s = 0. \qquad (29)$$

В полученном выражении $i = 1, 2 \cdots n$, $s = 0, 1 \cdots m$

$$\lambda_0 = \lambda_н = 0. \qquad (30)$$

В системе уравнений (29) исключим λ_i. Для этого используем $(n-1)$ уравнение, получаемое при $s = 0$, Тогда

$$2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi} x^m + a_{m-1,i} x^{m-1} + \cdots + a_{1,i} x + a_{0,i} - f(x)]\, dx - \lambda_{i-1} - \lambda_i = 0.$$

Таким образом, получено рекуррентное соотношение, связывающее λ_{i-1} и λ_i.

$$\lambda_{i-1} = \lambda_i + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi} x^m + a_{m-1,i} x^{m-1} + \cdots + a_{1,i} x + a_{0,i} - f(x)]\, dx. \quad (31)$$

Пусть $i = n$. Тогда, с учетом (30),

$$\lambda_{n-1} = 2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} [a_{m,n} x^m + a_{m-1,n} x^{m-1} + \cdots a_{1,n} x + a_{0,n} - f(x)]\, dx.$$

Пользуясь уравнением (31), получим при $i = n-1,\ n-2, \cdots 2$

$$\lambda_{n-2} = 2 \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} [a_{m-1n} x^m + a_{m-1,n-1} x^{m-1} + \cdots + a_{1,n-1} x + a_{0,n-1} - f(x)]\, dx +$$

$$+ 2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} [a_{m,n} x^m + a_{m-1,n} x^{m-1} + \cdots + a_{1,n} x + a_{0,n} - f(x)]\, dx$$

. . . .

$$\lambda_1 = 2 \int_{x_1}^{x_2} [a_{m,2} x^m + a_{m-1,2} x^{m-1} + \cdots + a_{1,2} x + a_{0,2} - f(x)]\, dx + \cdots$$

$$\cdots + 2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} [a_{m,n} x^m + a_{m-1,n} x^{m-1} + \cdots + a_{1,n} x + a_{0,n} - f(x)]\, dx. \quad (32)$$

Таким образом, используя значение $s = 0$ и придавая i значения $n.\ n-1, \cdots 2$, т. е. используя $(n-1)$ уравнение вида (29), нам удалось определить величины λ_i через a_{si}. Положим в уравнении (31) $i = 1$. Тогда, с учетом (30)

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi}x^m + a_{m-1,i}\, x^{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,i}\, x + a_{0,i} - f(x)]\, dx = 0. \tag{33}$$

Значения λ_i из (32) подставим в (29)

$$2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi} x^m + a_{m-1,i}\, x^{m-1} + \cdots + a_{1,i}x + a_{0,i} - f(x)]\, x^s dx -$$

$$- x_{i-1}^s \Bigl\{ 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_{mi}x^m + a_{m-1,i}\, x^{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,i}x + a_{0,i} - f(x)]\, dx + \cdots$$

$$\cdots + 2 \int_{x_{n-i}}^{x_n} [a_{m,n}\, x^m + a_{m-1,n}x^{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,n}x + a_{0,n} - f(x)]\, dx \Bigr\} -$$

$$+ x_i^s \Bigl\{ 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a_{m,i+1}\, x^m + a_{m-1,i+1}\, x^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,i+1}\, x + a_{0,i+1} - f(x)]\, dx + \cdots$$

$$\cdots 2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} [a_{m,n}x^m + a_{m-1,n}x^{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{1,n}\, x + a_{0,n} - f(x)]\, dx \Bigr\} = 0. \tag{34}$$

Произведя в выражении (34) интегрирование и приведение подобных членов, получим

$$a_{mi}\left[\frac{x_i^{m+s+1} - x_{i-1}^{m+s+1}}{m+s+1} - x_{i-1}^s \frac{x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1}}{m+1} \right] + \cdots$$

$$\cdots + a_{0i}\left[\frac{x_i^{s+1} - x_{i-1}^{s+1}}{s+1} - x_{i-1}^s (x_i - x_{i-1}) \right] +$$

$$+ a_{m,i+1}\left[x_i^s \frac{x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1}}{m+1} - x_{i-1}^s \frac{x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1}}{m+1} \right] + \cdots$$

$$\cdots + a_{0,i+1}\left[x_i^s (x_{i+1} - x_i) - x_{i-1}^s (x_{i+1} - x_i) \right] + \cdots$$

$$\cdots + a_{m,n}\left[x_i^s \frac{x_n^{m+1} - x_{n-1}^{m+1}}{m+1} - x_{i-1}^s \frac{x_n^{m+1} - x_{n-1}^{m+1}}{m+1} \right] + \cdots$$

$$+ a_{0,n}\left[x_i^s(x_n - x_{n-1}) - x_{i-1}^s(x_n - x_{n-1})\right] =$$

$$M_{si} - x_{i-1}^s M_{0,i} + M_{0,i+1}\left(x_i^s - x_{i-1}^s\right) + M_{0,i+2}\left(x_i^s - x_{i-1}^s\right) + \cdots$$

$$\cdots + M_{0,n}\left(x_i^s - x_{i-s}^s\right). \qquad (35)$$

Для учета условия (30) при $i=1$ в уравнении (35) нужно принять $x_{i-1}^s = 0$. Соответственно при $i=n$ в уравнении (35) полагаются равными нулю все члены, имеющие индексы $i+1,\ i+2\ldots n$.

Проинтегрируем уравнение (33)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{mi}\frac{x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1}}{m+1} + a_{m-1,i}\frac{x_i^m - x_{i-1}^m}{m} + \cdots\right.$$

$$\left. + a_{1,i}\frac{x_i^2 - x_{i-1}^m}{2} + a_{0,i}(x_i - x_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n} M_{0,i}. \qquad (36)$$

Таким образом, система mn уравнений, получаемая из (35) при различных $i = 1, 2\cdots n$ и $s = 1, 2\cdots m$, совместно с уравнением (36) и $(n-1)$ условием вида (28) дают нам $n(m+1)$ уравнение для определения искомых параметров ломаной a_{si}.

Пример. Дана функция $f(x) = \sin x$ на интервале $(-1. +1)$. Требуется определить параметры аппроксимирующей ломаной, состоящей из отрезков прямых. Весь интервал разбит на четыре равных отрезка.

Запишем систему (5)

$$a_{11}\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} + a_{01}\frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = M_{1,1};\ i = 1;\ s = 1;$$

$$a_{11}\frac{x_1^2 - x_0^2}{2} + a_{0,1}(x_1 - x_0) = M_{01};\ i = 1;\ s = 0;$$

$$a_{12}\frac{x_2^2 - x_1^3}{3} + a_{02}\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = M_{1,2};\ i = 2;\ s = 1;$$

$$a_{12}\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + a_{02}(x_2 - x_1) = M_{0,2};\ i = 2;\ s = 0;$$

$$a_{13}\frac{x_3^3 - x_2^2}{3} + a_{03}\frac{x_3^2 - x_2^2}{2} = M_{1,3};\ i = 3;\ s = 1;$$

$$a_{13}\frac{x_3^2 - x_2^2}{2} + a_{03}(x_3 - x_1) = M_{0,3};\ i = 3;\ s = 0;$$

$$a_{14}\frac{x_4^3 - x_3^3}{3} + a_{04}\frac{x_4^2 - x_3^2}{2} = M_{1,4};\ i = 4;\ s = 1;$$

$$a_{1,4}\frac{x_4^2 - x_3^2}{2.} + a_{04}(x_4 + x_3) = M_{0,4};\ i = 4;\ s = 0.$$

Проделав необходимые вычисления, определим значения искомых коэффициентов.

$$a_{01} = -0,13; \quad a_{02} = +0,005; \quad a_{03} = 0,005; \quad a_{04} = 0,13;$$

$$a_{11} = 0,72; \quad a_{12} = 0,96; \quad a_{13} = 0,96; \quad a_{14} = 0,73.$$

Значения погрешности при этом, определенные как max mod $\{q(x) - f(x)\}$ не превышают 0,006 для интервалов *2* и *3* и 0,011 для интервалов *1* и *4*.