К. Д. Колесников, Е. А. Климушкин

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

В последнее время в металлообрабатывающей промышленности все более широкое применение находят станки с программным управлением. Одной из наиболее сложных задач при создании систем программного управления является задача образования формы изделия в тех случаях, когда профиль детали очерчен сложными кривыми. В аналоговых системах программного управления сложный, криволинейный контур изделия задается в виде опорных точек, через которые проходит подлежащая воспроизведению кривая. При обработке изделия вместо точек инструмент должен воспроизводить профиль изделия и в промежутках между опорными точками, следовательно, возникает необходимость получения дополнительной информации. Эта промежуточная информация получается с помощью специальных счетно-решающих устройств—интерполяторов.

Интерполятор, как и любое счетно-решающее устройство, при своей работе допускает некоторую ошибку, которая в результате приводит к тому, что профиль обработанного изделия отклоняется от заданного на какую-то величину. Погрешность интерполятора складывается из двух основных: математической и конструктивной.

Первая является погрешностью метода, т. е. она дает отклонение интерполирующей функции от интерполируемой на участке интерполирования.

Вторая определяется совершенством конструкции интерполятора, в нее входят погрешности за счет падений напряжения, фазовые погрешности, погрешности, вносимые трущимися контактами, и др.

Настоящая статья ставит своей целью дать общую теорию определения математической погрешности метода. При рассматривании этого вопроса различными авторами за погрешность интерполирования принимается разная величина. Большинство авторов считает погрешностью расстояние между интерполирующей и интерполируемой функциями, отнесенное к одной из осей координат или, в полярных координатах, к радиусу-вектору ρ.

Перечисленные методы не дают действительной ошибки между заданными размерами изделия и полученными в результате интерполирования. Наиболее правильным было бы считать расстояние между интерполирующей и интерполируемой на участке интерполирования по нормали к интерполирующей или интерполируемой функции.

Положим, что интерполируемая функция $f_1(x)$ и интерполирующая функция на участке Δ не имеют разрыва непрерывности. Интерполирующая функция $f_2(x)$ заложена в конструкцию интерполятора и всегда известна. $f_1(x)$ может иметь на интерполируемом участке Δ любой характер.

Авторами статьи предлагается по известному интервалу Δ и интерполируемой функции $f_2(x)$ найти параметры интерполирующей функции $f_2(x)$, а затем по нормали к $f_1(x)$ найти максимальную погрешность и ее зависимость от класса функции $f_1(x)$ и параметров $f_2(x)$.

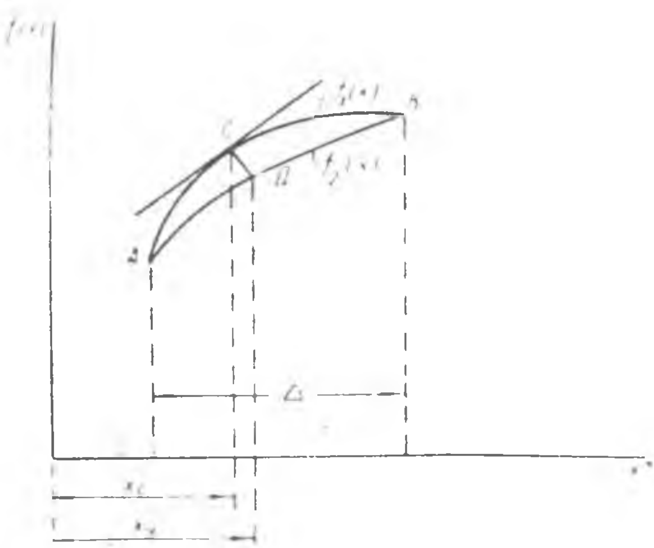

Рис. 1.

Погрешность интерполирования в любой точке C интерполируемой кривой определяется отрезком $CD = \beta$ (рис. 1).

Отрезок CD легко находится из выражения:

$$CD = \sqrt{[f_1(x_c) - f_2(x_d)]^2 + (x_c - x_d)^2}. \quad (1)$$

Абсцисса точки D — x_d является функцией абсциссы точки C — x_c. Эта зависимость $x_d = \varphi_1(x_c)$ находится по точке пересечения нормали CD к $f_1(x)$ с $f_2(x)$.

Уравнение нормали к $f_1(x)$ в точке C будет

$$f_3(x) = f_1(x_c) = -\frac{x_c}{f_1'(x)} + k, \tag{2}$$

где k определяется для точки C:

$$f_3(x_c) + \frac{x_c}{f_1'(x_c)}, \tag{3}$$

откуда

$$k = f_1(x_c) + \frac{x_c}{f_1'(x_c)}. \tag{4}$$

Подставляя полученное значение k в уравнение (2), получим:

$$f_3(x) = \frac{1}{f_1'(x_c)}x + \frac{x_c}{f_1'(x_c)} + f_1(x_c) = \frac{x_c - x}{f_1'(x_c)} + f_1(x_c). \tag{5}$$

В точке D будет существовать равенство:

$$f_3(x_d) = f_2(x_d). \tag{6}$$

Решением уравнения (6) относительно x_d находится функция $\alpha_1(x_c)$. Найденное значение x_d подставляется в выражение (1), откуда получается значение погрешности β. Затем, по общим правилам нахождения экстремальных значений функций находится максимальное значение погрешности β_{max} на интерполируемом участке.

В качестве примера ниже приводится определение погрешности с помощью предлагаемого метода для простого случая интерполирования дуги параболы второго порядка с помощью линейного интерполятора в прямоугольной системе координат.

Интерполирующая функция в данном случае определяется выражением:

$$f_2(x) = k_2 x + k_3, \tag{7}$$

а интерполируемая функция выражением (8)

$$f_1(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2; \tag{8}$$

для точки D получим равенство

$$\frac{x_c - x_d}{f_1'(x_c)} + f_1(x_c) = k_2 x_d + k_3, \tag{9}$$

откуда найдется x_d

$$x_d = \frac{f_1(x_c) - k_3 + \dfrac{x_c}{f_1'(x_c)}}{k_2 + \dfrac{1}{f_1'(x_c)}} = \frac{f_1'(x_c) \cdot f_1(x_c) - k_3 f_1'(x_c)}{k_2 f_1'(x_c) + 1}. \tag{10}$$

Исходя из выражений (6), (7), (9) и (10), максимальная погрешность линейного интерполятора определится следующим образом (для простоты будем считать, что начало координат совпадает с началом интерполирования (рис. 2) при этом $\kappa_3 = 0$):

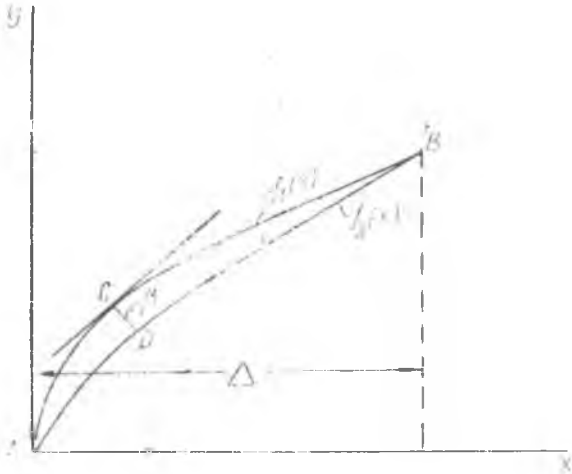

Рис. 2.

$$\beta^2 = \left[f_1(x) - k_2 \frac{f_1'(x_c)\cdot f_1(x_c) + x_c}{1 + k_2 f_1'(x_c)}\right]^2 + \left[x_c - \frac{f'(x_c)\cdot f_1(x_c) + x_c}{1 + k_2 f_1'(x_c)}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{f_1(x_c) - k_2 x_2}{1 - k_2 f_1'(x_c)}\right]^2 \left\{1 + [f_1'(x_c)]^2\right\}. \quad \textbf{(11)}$$

Для определения экстремума находится первая производная от β^2

$$\frac{d\beta^2}{ax_c} = 2\left[\frac{f_1(x_c) - k_2 x_c}{[1 + k_2 f_1'(x_c)]^2}\right] \times$$

$$\times \left\{\frac{\{1 + [f_1'(x_c)]^2\}\,\{[f_1'(x_c) - k_2][1 + k_2 f_1'(x_c)] - k_2 f_1''(x_c)[f_1(x_c) - k_2 x_c] + [1 + k_2 f_1'(x_c)][f_1(x_c) - k_2 x_c]\, f_1'(x_c)\, f_1''(x_c)}{1 + k_2 f_1'(x_c)}\right\} = 0. \quad (12)$$

Первые абсциссы экстремальных точек найдутся из предыдущего уравнения. Эти абсциссы соответствуют абсциссам узлов интерполирования, в которых погрешность будет минимальной, т. е. равной нулю.

$$f_1(x_c) - k_2 x_2 = 0. \quad (13)$$

Абсциссы других экстремальных точек получатся из уравнения (14), определятся же они вторым сомножителем выражения (12)

$$[f_1'(x_c)-k_2]\,[1-k_2f'(x_c)]-k_2f_1''(x_c)\,[f_1(x_c)-k_2x_c]+$$
$$+[f_1'(x_c)]^2\,\{[f_1'(x_c)-k_2]\,[1+k_2f_1'(x_c)]-k_2f_1''(x_c)\,[f_1(x_c)-k_2x_c]\}+$$
$$+f_1'(x_c)\cdot f_1''(x_c)[f_1(x_c)-k_2x_c]+k_2[f_1'(x_c)]^2\cdot f_1''(x_c)\,[f_1(x_c)-k_2x_c]=0. \quad (14)$$

После приведения подобных членов это выражение примет вид:

$$[f_1'(x_c)-k_2]\,\{1+k_2f_1'(x_c)+f_1''(x_c)\,[f_1(x_c)-k_2x_c]+[f_1'(x_c)]^2\times$$
$$\times[1+k_2f_1'(x_c)]\}=0. \quad (15)$$

Это выражение может быть разбито на два:

$$f_1'(x_c)-k_2=0, \quad (16)$$

$$\{1+k_2f'(x_c)+f_1''(x_c)\,[f_1(x_c)-k_2x_c]+f_1'(x_c)^2[1+k_2f_1'(x_c)]\}=0. \quad (17)$$

Абсциссы, соответствующие максимальным погрешностям, находятся из выражения (16), которое и используется в дальнейшем анализе.

Теперь рассмотрим интерполируемую параболу (8).

$$f_1(x)=A_0x^2+A_1x+A_2$$

и найдем производную в точке x_c

$$f_1'(x_c)=2A_0x_c+A_1=k_2, \quad (18)$$

откуда:

$$x_{c\,\max}=\frac{k_2-A_1}{2A_0}. \quad (19)$$

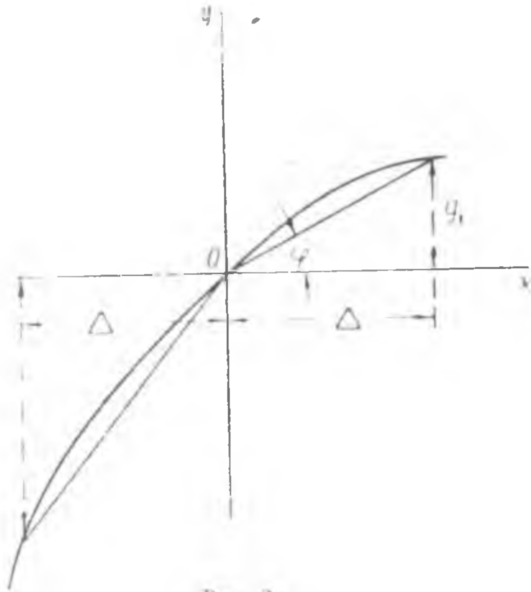

Рис. 3.

При равных интервалах интерполирования Δ, начале координат, совпадающем с началом интерполирования ($A_2=0$), и для известных значений ординат опорных точек y_1 и y_2 (рис. 3) интерполируемая функция найдется из определителя:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_c) & 1 & x & x^2 \\ y_1 & 1 & \Delta & \Delta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y_2 & 1 & -\Delta & \Delta^2 \end{vmatrix}=0, \quad (20)$$

откуда:

$$f_1(x_c) = \frac{y_1 - y_2}{2\,\Delta^2}\,x^2 + \frac{y_1 - y_2}{2\,\Delta}, \tag{21}$$

т. е.

$$A_0 = \frac{y_1 - y_2}{2\Delta^2}; \quad A_1 = \frac{y_1 - y_2}{2\,\Delta}. \tag{22}$$

Из рис. 3 найдется наклон интерполирующей прямой, т. е.

$$k_2 = \frac{y_1}{\Delta}. \tag{23}$$

Подставляя значения A_0 и A_1 из (22), а κ_2 из (23) в (19), найдем:

$$x_{c_{\max}} = \frac{\dfrac{y_1}{\Delta} - \dfrac{y_1 + y_2}{2\,\Delta}}{8\,\dfrac{y_1 - y_2}{8\,\Delta^2}} = \frac{\Delta}{2}, \tag{24}$$

т. е. максимальная погрешность в этом случае находится в середине интервала интерполирования. Величина максимальной погрешности в данном случае определится выражением (25).

$$\beta_{\max} = \frac{f_1(x_{c_{\max}}) - k_2 x_{c_{\max}}}{1 - k_2 f_1'(x_{c_{\max}})}\sqrt{1 + [f_1'(x_{c_{\max}})]^2}. \tag{25}$$

Если теперь подставить значение $x_{c_{\max}} = \frac{\Delta}{2}$, то найдем

$$f_1\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{y_1 - y_2}{2\,\Delta^2}\,\frac{\Delta}{4} + \frac{y_1 + y_2}{2\,\Delta}\,\frac{\Delta}{2} = \frac{3y_1 + y_2}{8}, \tag{26}$$

$$k_2 x_{c_{\max}} = \frac{y_1}{\Delta}\,\frac{\Delta}{2} = \frac{y_1}{2}. \tag{27}$$

$$f_1'(x_{c_{\max}}) = 2A_0 x_{c_{\max}} + A_1 = \frac{y_1}{2}. \tag{28}$$

Подставляя полученные значения $f_1\,x_{c_{\max}}$, $k_2\,(x_{c_{\max}})$ и $f_1\,(x_{c_{\max}})$ в выражение максимальной погрешности (25), получим величину этой погрешности:

$$\beta_{\max} = \frac{\dfrac{3y_1 + y_2}{8} - \dfrac{y_1}{2}}{1 - k_2^2}\sqrt{1 + k_2^2} = \frac{(y_2 - y_1)\,\Delta}{8\sqrt{y_1^2 + \Delta^2}} \tag{29}$$

При определении погрешности интерполирования для высоких порядков интерполирующих и интерполируемых функций в некоторых случаях анализ может быть более сложным. В таким случаях, очевидно, следует для ускорения процесса решения пользоваться электронно-вычислительными машинами.