А. И. Комаров

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ УСРЕДНЕНИЯ ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

На измерение математического ожидания и отдельных ординат корреляционной функции стационарного случайного процесса существенным образом влияют как параметры отдельных звеньев измерительного устройства, так и время наблюдения стационарного процесса. Коррелятор можно рассматривать как чистое вычислительное устройство, выполняющее последовательность операций согласно выражения математического ожидания.

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

или корреляционной функции

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t-\tau)\,dt,$$

или как некоторую измерительную систему, показания которой будут пропорциональны вышеуказанным выражениям. В последнем случае отклонение указателя регистрирующего прибора будет определяться частотными свойствами как реализация случайного процесса так и измерительной системы. Определение погрешностей при вычислении m_x и $R_x(\tau)$ путем анализа спектральной плотности случайного процесса и коэффициентов передач отдельных блоков коррелятора особенно удобно бывает там, где применяются разные скорости при записи и воспроизведении реализаций случайного процесса [6], т. е. там, где применяется трансформация спектра.

При определении погрешностей вычисления математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса

$$x(t) = x_0(t) + m_x,$$

связанных с конечностью времени наблюдения, необходимо знать корреляционную функцию случайного процесса $x(t)$. Если функция $x(t)$ в любые моменты времени t распределена не по нормальному закону, то необходимо дополнительно к предыдущему еще и знать корреляционную функцию более сложного процесса

$$z(t) = x(t)\,x(t+\tau).$$

Вычисления корреляционных функций процессов $x(t)$ и $z(t)$, а также и определения среднеквадратических погрешностей по приведенным в литературе [1] и [2] формулам представляет иногда значительные трудности.

Можно показать, что представляя случайный процесс $x(t)$ в виде интегрального канонического разложения и применяя принцип

$$x(t) = m_x + \int_0^\infty [u(\omega)\cos\omega t + v(\omega)\sin\omega t]\,d\omega \tag{1}$$

наложения при действии функции (1) на инерционную систему, параметры последней можно подобрать таким образом, что указанная система будет определять математическое ожидание или корреляционную функцию случайного процесса $x(t)$ за определенное время с заранее указанной точностью. Для этого оказывается необходимым только знать спектральную плотность $S(\omega)$ центрированной случайной функции

$$x_0(t) = x(t) - m_x$$

Действительно, возьмем случайный процесс $x_0(t)$ со спектральной плотностью $S_x(\omega)$. Если этот процесс воздействует на инерционную систему с коэффициентом передачи $K(j\omega)$, то на выходе этой системы спектральная плотность случайного процесса $y(t)$ будет равна

$$S_y(\omega) = S_x(w)\cdot|k(j\omega)|^2,$$

а дисперсия случайного процесса на выходе инерционной системы определится из выражения

$$D_y = \int_0^\infty s_x(\omega)\,|k(j\omega)|^9\,d\omega. \tag{2}$$

Среднеквадратичное уклонение процесса $y(t)$ будет равно

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}\,. \tag{3}$$

Очевидно, что после воздействия на инерционную систему случайного процесса (1) на выходе последней при $t=\infty$ мы получим случайную функцию $y(t)$ с математическим ожиданием $m_y = k(0) \cdot m_x$ и дисперсией, определяемой выражением (2).

Задавшись определенной, наперед заданной величиной среднеквадратичного уклонения σ_y можно из выражений (3) и (2) найти значение постоянной времени инерционной системы, удовлетворяющей поставленным условиям. Зная постоянную времени инерционной системы T, можно определить время, через которое система под воздействием ступенчатой функции отклонится до величины, отличающейся меньше чем на σ_y от своего установившегося значения. В нашем случае ступенчатая функция будет определяться математическим ожиданием случайной величины $x(t)$. Сигнал на выходе инерционной системы будет изменяться от 0 до значения $m_x\, k(0)$. Время усреднения определится из выражения

$$k(0)\, m_x - \sigma_y = k(0)\, m_x - k(0)\, m_x e^{-\frac{t_{\text{и}}}{T}}$$

или

$$e^{-\frac{t_{\text{и}}}{T}} = \frac{\sigma_y}{k(0)\, m_x} = \delta_x ,$$

где — δ_x — относительная погрешность определения m_x,

отсюда

$$t_{\text{и}} = T \ln \frac{k(0)\, m_x}{\sigma_y} = T \ln \frac{1}{\delta_x}. \tag{4}$$

Можно предположить, что после времени усреднения $t_{\text{и}}$ инерционная система укажет математическое ожидание случайной величины $x(t)$ с абсолютной погрешностью, не превышающей $2\sigma_y$.

Проверим возможность применения формулы (4). Во время переходного режима инерционной системы, возникшего под воздействием стационарного процесса $x(t)$, на выходе инерционной системы появится нестационарный случайный процесс $y(t)$ с переменными как математическим ожиданием $y(t)$, так и среднеквадратичным уклонением σ_y. Найдем изменение квадрата σ_y от времени в течение переходного процесса. Можно показать [5], что обобщенная частотная характеристика инерционной системы, описываемой уравнением

$$T \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

может быть найдена из выражения

$$|k(j\omega, t)|^2 = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1} \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T}} \cos \omega t + e^{-2\frac{t}{T}} \right),$$

а квадрат σ_y можно определить по формуле

$$\sigma_y^2(t) = \int_0^{\infty} s_x(\omega)\, |k(j\omega, t)|^2\, d\omega.$$

Для нашего случая

$$\sigma_y^2(t) = I_1 + I_2 + I_3 = \int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}\,d\omega -$$

$$-2e^{-\frac{t}{T}}\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}\cos\omega t\,d\omega + e^{-2\frac{t}{T}}\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}\,d\omega.$$

Первое слагаемое I_1 дает выражение квадрата σ_y в установившемся режиме, вторые два слагаемых I_2 и I_3 показывают изменения среднеквадратичного уклонения во время переходного процесса.

Найдем значения I_2 и I_3 после подстановки в них времени $t_н$ из выражения (4).

$$I_2 = -2e^{-\frac{t}{T}}\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}\cos\omega t\,d\omega = -2\delta_x\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}\cos\omega t\,d\omega.$$

$$I_3 = e^{-2\frac{t}{T}}\cdot I_1 = \delta_x^2\cdot I_1.$$

Т. к. дробь $\dfrac{S_x(\omega)}{T^2\omega^2+1}$ при любом ω положительна, то можно написать

$$|I_2| < 2\delta_x\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{\omega^2T^2+1}\,|\cos\omega t|\,d\omega <$$

$$< 2\delta_x\int\limits_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{\omega^2T^2+1}\,d\omega = 2\delta_x\cdot I_1.$$

Т. о. в момент времени $t_н$ среднеквадратичное уклонение будет не более

$$\sigma_y^2(t_н) < I_1(1 + 2\delta_x + \delta_x^2).$$

Из последнего неравенства можно заметить, что дополнительная погрешность, вызванная конечным временем наблюдения $t_н$ будет являться величиной второго порядка малости по отношению к основной погрешности, определяемой при установившемся режиме работы схемы. Поэтому величиной этой погрешности можно пренебречь. Так три $K(0) = 1$ и $\dfrac{\sigma_u}{m_x} = 0{,}5\ \%$ среднеквадратичное уклонение в момент времени $t_н$ может отличаться от своего установившегося значения на величину не большую

$$\sigma_y(t_н) - \sigma_y = 1{,}01\sqrt{I_1} - \sigma_y = 0{,}01\sigma_y,$$

что будет составлять $\dfrac{1}{10\,000}$ долю значения m_x.

Из изложенного можно сделать следующий вывод: для определения m_x случайного процесса со спектральной плотностью $S_x(\omega)$ необходимо взять его реализацию в интервале времени от 0 до $t_и$ и исследовать его инерционной системой с постоянной времени, определяемой формулой (4).

Пусть случайный процесс $x(t)$ имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \frac{D_x e^{-\alpha\tau}}{\pi}$$

и спектральную плотность

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Коэффициент передачи инерционного звена равен

$$|k| = \frac{N}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Спектральная плотность случайной функции $y(t)$ определится из выражения

$$S_y(\omega) = \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{N^2}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Дисперсия процесса $y(t)$ будет равна

$$D_y = \frac{2D_x \alpha N^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(1 + \omega^2 T^2)}.$$

После некоторых преобразований найдем:

$$D_y = \frac{2D_x \alpha N^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha(\alpha T + 1)} = \frac{D_x N^2}{1 + \alpha T} = \sigma_y^2.$$

Из последнего выражения можно найти постоянную времени T

$$T = \frac{D_x N^2}{\alpha \sigma_y^2} - \frac{1}{\alpha};$$

т. к. по условиям задачи $D_x \gg \sigma_y^2$, то вторым членом можно пренебречь. Тогда

$$T = \frac{D_x N^2}{\alpha \sigma_y^2}.$$

Если положить $k(0) = N = 1$ и $\sigma_y = 0{,}01\, m_x$, то время интегрирования определится из формулы

$$t_и = T \ln \frac{k(0)\, m_x}{\sigma_y} = 4{,}6T = 4{,}6 \frac{D_x}{\alpha \sigma_y^2}.$$

Определим теперь среднеквадратичную погрешность, вызванную конечностью времени усреднения из выражения

$$\sigma^2 = \frac{M|m(t_н)|^2 - [Mx(t)]^2}{[Mx(t)]^2}.$$

Если рассматривать центрированную функцию $x_0(t) = x(t) \cdot m_x$, то

$$\sigma^2 = M\,[m_0(t_н)]^2,$$

где

$$m_0(t) = \frac{1}{t_н}\int_0^{t_н} x_0(t)\,dt. \tag{6}$$

Как известно [2]

$$M\,[m_0(t_н)]^2 = \frac{2}{t_н}\int_0^{t_н}\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)R_0(\tau)\,d\tau$$

при $\tau \ll t_н$

$$M\,[m_0(t_н)]^2 = \frac{2}{t_н}\,R_0(\tau)\,d\tau.$$

Т. о. для нашего случая можно написать

$$\sigma^2_{\min} = \frac{2}{t_н}\cdot\frac{D_x}{\pi}\int_0^{t_н} e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{2}{t_н}\,\frac{D_x}{\pi\alpha}\,(1 - e^{-\alpha t_н}).$$

Если положить $t_н = \frac{2D_x}{\pi\alpha\sigma^2_{\min}}$, то величиной $e^{-\frac{2}{\pi}\frac{D_x}{\sigma^2_{\min}}}$ можно пренебречь. Время усреднения найдется окончательно из выражения

$$t_н = \frac{2}{\pi}\,\frac{D_x}{\alpha\sigma^2_{\min}} = 0{,}64\,\frac{D_x}{\alpha\sigma^2_{\min}}. \tag{7}$$

Из сравнения формул (7) и (5) видно, что необходимое время усреднения, подсчитанное на основании спектральной плотности случайного процесса и параметров инерционной системы не меньше времени усреднения, определяемого математическим ожиданием квадрата случайной функции (6). Т. к. при экспериментальном определении математического ожидания случайной функции мы всегда вынуждены применять инерционную систему (при корреляторах непрерывного действия), то пользование формулой (5) является предпочтительнее.

Если случайный процесс имеет спектральную плотность вида

$$s_x(\omega) = \left|\begin{array}{lr} A \text{ при } 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 \\ 0 \text{ при } \omega > \omega_1, \end{array}\right.$$

то, проводя подобные рассуждения, можно найти, что постоянная времени инерционной системы определится из выражения

$$\frac{T}{\operatorname{arc\,tg}\omega_1 T} = \frac{AN^2}{\sigma^2_{\min}}. \tag{9}$$

При определении погрешности вычисления корреляционной функции необходимо знать спектральную плотность случайного

$$z_0(t) = x_0(t) \cdot x_0(t - \tau).$$

процесса. Если считать, что множительное устройство является безинерционным во всем диапазоне интересующих нас частот и принять во внимание то обстоятельство, что спектральная плотность случайного процесса при сдвиге его по времени не меняется, то спектральная плотность флюктуаций случайного процесса $Z_0(t)$ на выходе множительного звена, т. е. процесса

$$\mathring{z}_0(t) = z_0(t) - m_{z_0}$$

может быть найдена из выражения

$$s_z(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\nu) s_x(\omega - \nu) \, d\nu. \qquad (10)$$

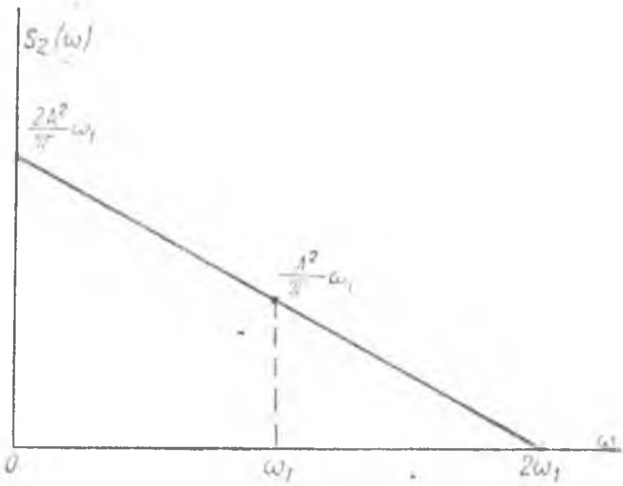

Рис. 1.

Если спектральная плотность случайного процесса $x_0(t)$ определяется выражением (8), то применяя формулу (10), можно найти, что спектральная плотность случайного процесса $Z_0(t)$ будет иметь вид (рис. 1).

$$S_z(\omega) = \frac{A^2}{\pi}(2\omega_1 - \omega).$$

На основании формулы (2) постоянную времени инерционной системы можно определить из выражения

$$\sigma^2_{\min} = \frac{A^2N^2}{\pi} \int\limits_0^{2\omega_1} \frac{2\omega_1 - \omega}{1 + \omega^2T^2}\, d\omega =$$

$$= \frac{A^2N^2}{\pi T^2} \left| 2\omega_1 T \operatorname{arc\,tg} 2\omega_1 T - \frac{1}{2} \ln (1 + 4\omega_1^2 T^2) \right| . \quad (11)$$

Определим приведенную относительную погрешность при вычислении корреляционной функции в виде отношения

$$\beta = \frac{\sigma_{\min}}{R(0)}$$

Т. к. значение корреляционной функции при $\tau = 0$ равно дисперсии случайного процесса, то в нашем случае

$$\beta = \frac{\sigma_{\min}}{R(0)} = \frac{\sigma_{\min}}{A\omega_1} .$$

Теперь выражение (11) можно записать в виде

$$\beta^2 = \frac{N^2}{\pi \omega_1{}^2 T^2} \left| 2\omega_1 T \operatorname{arc\,tg} 2\omega_1 T - \frac{1}{2} \ln (1 + 4\omega_1^2 T^2) \right| . \quad (12)$$

Положим $\omega_1 T > 10\,000$, тогда можно написать $\operatorname{arc\,tg} 2\omega_1 T = \frac{\pi}{2}$, а вторым членом разности в выражении (12) можно пренебречь. В этом случае выражение (12) примет вид

$$\beta^2 = \frac{N^2}{\omega_1 T}$$

при $N = 1$ $\beta < 0{,}01$.

Т. о. при исследовании случайного процесса со спектральной плотностью (8) инерционная система с постоянной времени

$$T = \frac{10\,000}{\omega_1} = \frac{10\,000}{2\pi f_1} = \frac{1600}{f_1} \textit{ сек}$$

позволит определить корреляционную функцию с приведенной относительной погрешностью порядка 2%. Время усреднения можно вычислить по формуле

$$0{,}01 = e^{-\frac{t_{\text{и}}}{T}} .$$

Отсюда

$$t_{\text{и}} = T \ln 100 = 4{,}6\, T \textit{ сек}.$$

Общее время, требуемое для определения корреляционной функции, будет складываться из необходимого времени усреднения и максимального времени сдвига $\tau_{\max}$, т. е.

$$t_{\text{общ}} \geqslant t_{\text{и}} + \tau_{\max} .$$

Полученные результаты были использованы при разработке коррелятора, предназначенного для исследования случайных процессов низкой частоты. Точность работы коррелятора проверялась путем исследования случайного процесса, корреляционная функция которого была заранее известна. На рис. 2 сплошной линией указана действительная кривая, пунктирной линией кривая, вычисленная на корреляторе. Истинное значение корреляционной

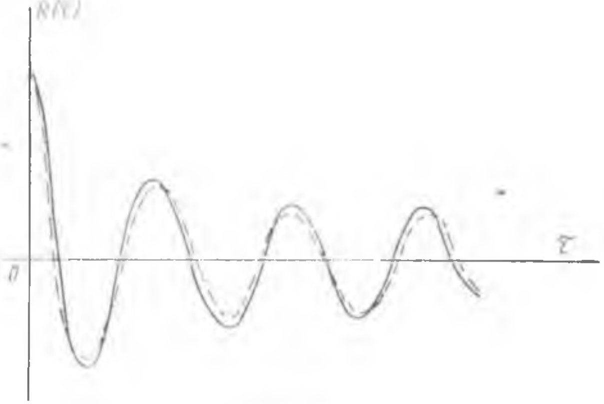

Рис. 2.

функции определялось с использованием ЭЦВМ «УРАЛ-1» и специальной приставки, преобразующей непрерывные величины в дискретные. Если учесть точность обработки случайного процесса на ЭЦВМ (1—2%) и сравнить обе кривые на рис. 2, то можно сказать, что погрешность коррелятора не должна превышать 6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Кутин. О вычислении корреляционной функции стационарного случайного процесса по экспериментальным данным, «Автоматика и телемеханика», т. 3, 1957.
2. А. Е. Харыбин. Анализ ошибок в определении среднего значения случайной величины и ее квадрата, связанных с конечностью времени наблюдения, «Автоматика и телемеханика», т. 4, 1957.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.
4. А. А. Фельдбаум. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
5. Дж. Лэннинг и Р. Г. Бэттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Под редакцией В. С. Пугачева. Изд. иностр. лит., 1958.
6. А. И. Комаров. Применение трансформации спектра при определении корреляционных функций случайных процессов, лежащих в области низких частот. ИВУЗ, «Приборостроение», т. V, № 3, 1962.