Г. А. САРКИСОВ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВОЗМУЩЕННОЙ И НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНЫХ САР

Часто можно встретить толкование различных вопросов теории автоматического регулирования с ограничением задачи на класс систем, описываемых однородным линейным дифференциальным уравнением [1]. В большинстве случаев доказательство справедливости положения для системы, на которую не действуют возмущения, может оказаться справедливым и для возмущенной системы.

Линейная система автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m f(t),$$

где $x(t)$ — координаты системы;

$f(t)$ — возмущение.

Обозначая через $D_0(p)$ сумму членов, содержащих начальные условия, можно получить операторное выражение для координаты $x(t)$ [2].

$$X(p) = \frac{N(p)\,F(p) + D_0(p)}{D(p)} = \frac{X_1(p)}{X_2(p)}, \tag{1}$$

где $D(p)$ — операторный полином, соответствующий левой части дифференциального уравнения без членов, содержащих начальные условия;

$N(p)$ — операторный полином, соответствующий правой части дифференциального уравнения.

Можно ли по операторному виду одной из координат системы сделать заключение о наличии возмущения, воздействующего на систему в виде единичного скачка, единичной импульсной функции, экспоненциальной функции и вообще функции самого общего вида? Очевидно, нет. При этом выражение координаты $x(t)$ по ее операторному виду однозначно определяется теоремой разложения.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_1(p_k)}{X_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

при отсутствии нулевых и кратных корней.

Предположим, на систему воздействует единичная импульсная функция, а начальные условия нулевые. Тогда

$$\bar{X}(p) = \frac{\bar{N}(p)\cdot 1}{\bar{D}(p)} = \frac{\bar{x}_1(p)}{\bar{X}_2(p)}.$$

Найдем условия, которым должна удовлетворять линейная система, не подвергающаяся действию возмущений и имеющая тот же переходный процесс, что и в рассматриваемой системе с возмущением в виде импульсной функции и нулевыми начальными условиями. Координата искомой системы $\bar{y}(p)=\bar{X}_1(p)$ должно определяться выражением

$$\bar{Y}(p) = \frac{\bar{D}_0(p)}{\bar{D}(p)},$$

что очевидно из выражения (1) при подстановке в него $F(p)=0$. Тогда для равенства $\bar{Y}(p)=\bar{X}(p)$ необходимо выполнение условия

$$\bar{D}_0(p) = \bar{N}(p).$$

Положим $\bar{D}(p)$ и $\bar{N}(p)$ — полиномы соответственно порядка n и m, где $n=m+1$.
Тогда

$$\frac{\bar{D}_0(p)}{\bar{D}(p)} = \frac{\bar{N}(p)}{\bar{D}(p)} = \frac{a_0p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m}{p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

$\bar{D}_0(p)$ определяется по $\bar{D}(p)$, если известны начальные условия. Действительно, [3]

$$[p^n \bar{y}(p) - p^{n-1}\bar{y}(0) - p^{n-2}\bar{y}'(0) - \ldots - \bar{y}^{(n-1)}(0)] +$$
$$+ b_1[p^{n-1}\bar{y}(p) - p^{n-2}\bar{y}'(0) - \ldots - \bar{y}^{(n-2)}(0)] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ b_{n-1}[p\bar{y}(p) - \bar{y}(0)] + b_n\bar{y}(p) = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{y}(0) \\ a_1 &= b_1\bar{y}(0) + \bar{y}'(0) \\ a_2 &= b_2\bar{y}(0) + b_1\bar{y}'(0) + \bar{y}''(0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m &= b_{n-1}\bar{y}(0) + b_{n-2}\bar{y}'(0) + \ldots + \bar{y}^{(n-1)}(0) \end{aligned} \tag{2}$$

Из последней системы легко определить начальные условия искомой невозмущенной системы, имеющей тот же переходный процесс, что и заданная система с воздействием в виде единичной импульсной функции:

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(0) = a_0;\\
&\bar{y}'(0) = a_1 - b_1\bar{y}(0);\\
&\bar{y}''(0) = a_2 - b_1\bar{y}'(0) - b_2\bar{y}(0);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\bar{y}^{(n-1)}(0) = a_m - b_1\bar{y}^{(n-2)}(0) - \dots - b_{n-1}\bar{y}(0).
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим случай воздействия в виде единичного скачка $f(t)=1$. Начальные условия для общности выберем произвольно. Тогда

$$X(p) = \frac{\frac{N(p)}{p} + D_0(p)}{D(p)} = \frac{N(p) + D_0(p)\cdot p}{p\,D(p)} \tag{4}$$

В этом случае эквивалентную* невозмущенную систему можно получить из условия

$$\bar{D}_0(p) = N(p) + D_0(p)\cdot p.$$

Следует учесть, что в этом случае порядок полинома знаменателя (4) будет на единицу больше, чем в рассмотренном выше случае. Поэтому порядок числителя может оказаться $m=n-2$. Тогда в системе (2) левый столбец опустится на одну строку, то есть

$$\begin{aligned}
&0 = \bar{y}(0);\\
&a_0 = b_1\bar{y}(0) + \bar{y}'(0);\\
&a_1 = b_2\bar{y}(0) + b_1\bar{y}'(0) + \bar{y}''(0);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_m = b_{n-2}\bar{y}(0) + b_{n-1}\bar{y}'(0) + \dots + \bar{y}^{(n-1)}(0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Соответственно в системе (3) все слагаемые a_i опустятся на одну строку. Получится система (6) для определения начальных условий эквивалентной невозмущенной системы

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(0) = 0;\\
&\bar{y}'(0) = a_0 - b_1\bar{y}(0);\\
&\bar{y}''(0) = a_1 - b_1\bar{y}'(0) - b^2\bar{y}(0);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\bar{y}^{(n-1)}(0) = a_m - b_1\bar{y}^{(n-2)}(0) - \dots - b_{n-1}\bar{y}(0)
\end{aligned} \tag{6}$$

* Здесь и дальше под эквивалентными понимаются системы, тождественные в смысле переходных процессов.

Наконец, в самом общем случае, когда возмущение задано в операторном виде как полином $F(p)$ и начальные условия ненулевые, может быть получена эквивалентная невозмущенная система. Начальные условия для последней определятся, если взять

$$\overline{D}_0(p) = N(p) F(p) + D_0(p)$$

В случаях, когда $m \neq n-1$, начальные условия будут получаться, как частные случаи системы (3), при опускании столбца a_i на κ единиц, где $\kappa = n-(m+1)$.

Таким образом, всякая линейная возмущенная система может быть представлена как невозмущенная при соответствующем выборе начальных условий этой невозмущенной системы.

Возмущенная система может быть представлена как система с единичным импульсным возмущением, если операторное выражение выходной координаты вида $\frac{X_1(p)}{X_2(p)}$, и как система с единичным скачкообразным возмущением, при выходной координате вида $\frac{X_1(p)}{pX_2(p)}$.

Следует отметить, что все сказанное справедливо, когда возмущение, воздействующее на систему в операторной форме, может быть выражено целым полиномом степени $m<n$.

Возможность нахождения эквивалентных систем окажется полезной для анализа САР, а также для моделирования систем автоматического регулирования на аналоговых вычислительных машинах. При сведении заданного дифференциального уравнения, описывающего систему автоматического регулирования, к однородному потребуется число операционных усилителей, равное порядку однородного дифференциального уравнения.

Таким образом, на аналоговой вычислительной машине МН-7 могут моделироваться линейные системы с возмущением при порядке левой части не выше шестого.

Ниже приводится пример нахождения эквивалентной невозмущенной системы, если исходная система имеет единичное скачкообразное воздействие на входе при нулевых начальных условиях:

$$(0{,}05\,p^2 + 0{,}4\,p + 1)\,x(t) = (0{,}5\,p + 1)\cdot 1(t)$$

$$X(p) = \frac{0{,}5\,p+1}{p\,(0{,}05\,p^2+0{,}4\,p+1)} = \frac{10\,p+20}{p\,(p^2+8p+20)} = \frac{N(p)}{p\,D(p)}.$$

Согласно формуле теоремы разложения:

$$x(t) = 1 - (\cos 2t - 3\sin 2t)\,e^{-4t}.$$

Приравниваем $\overline{D}_0(p) = N(p)$

Из системы (5) определяем:

$$\overline{y}(0) = 0;$$
$$\overline{y}'(0) = 10 - 8\overline{y}(0) = 10;$$
$$\overline{y}''(0) = 20 - 8\overline{y}'(0) - 20\overline{y}(0) = -60.$$

Экивалентная невозмущенная система описывается дифференциальным уравнением:

$$\overline{y}''' + 8\overline{y}'' + 20\overline{y}' = 0,$$

где

$$\overline{y}(0) = 0; \quad \overline{y}'(0) = 10; \overline{y}''(0) = -60.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Каляев. Расчет переходного процесса в линейных системах методом понижения порядка дифференциального уравнения. «АИТ» № 9, 1959.

2. В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Теория системы автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1966.

3. W. D. Sitanley. Представление связи временной области и частотной в матричной форме. Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (Pzoceeding of the IEEE). США, № 7, 1964.