Ю. Н. БОРОДИН

О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, СОДЕРЖАЩЕГО ПЕРИОДИЧНОСТИ

Среднее значение является одной из основных статистических характеристик случайного процесса. Как показано в работах [1], [2], точность измерения среднего значения зависит от длительности интервала усреднения и свойств случайного процесса.

В работе [1] рассматривается случайный процесс, содержащий периодичности, амплитуда и частота которых известны. При этом величина среднеквадратичной погрешности определения среднего значения может быть представлена в виде суммы, состоящей из погрешности, возникающей из-за наличия периодичности, и погрешности, определяемой свойствами самого случайного процесса.

Дисперсии оценки среднего значения случайного процесса при непрерывном и дискретном способах усреднения получены в работе [2]. При определенных условиях точность измерения среднего значения незначительно зависит от способа усреднения.

В данной работе исследуется точность определения среднего значения случайного процесса, содержащего периодичности с известными амплитудой A, частотой ω и фазой φ, определенной равномерно в интервале $0—2\pi$.

Примером таких случайных процессов могут служить изменения во времени аэродинамических сил и моментов, действующих на несущий винт вертолета. Неравномерность воздушного потока и явления срывного характера приводят к образованию случайной составляющей измеряемых сигналов, а неуравновешенные в плоскости вращения и плоскости взмаха лопасти аэродинамические силы и моменты являются причиной периодических составляющих. Случайность фазы φ периодической составляющей следует понимать в том смысле, что начало измерений может находиться в любом месте интервала $0—2\pi$.

В дальнейшем будем предполагать, что систематические погрешности исключены, а величина инструментальной погрешности пренебрежительно мала.

Не сужая общности выводов, рассмотрим центрированный случайный процесс, среднее значение которого равно нулю, а величину максимальной приведенной среднеквадратичной погрешности будем характеризовать отношением среднеквадратичной погрешности к среднеквадратичному значению случайного процесса.

Имеем

$$x(t) = y(t) + n(t), \tag{1}$$

где $y(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ — периодическая составляющая с известными амплитудой A, частотой ω_1 и случайной фазой φ;

$n(t)$ — случайная составляющая с математическим ожиданием, равным нулю.

Оценим величину погрешности измерения среднего значения случайного стационарного сигнала вида (1) при непрерывном усреднении на интервале времени $0 \div T$*. Пусть корреляционная функция случайной части $n(t)$ описывается выражением:

$$R_n(\tau) = De^{-\alpha(\tau)} \cos \beta\tau. \tag{2}$$

Предположив, что процессы $y(t)$ и $n(t)$ независимы, найдем корреляционную функцию процесса $x(t)$:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos \omega_1 \tau + D_n\, e^{-\alpha(\tau)} \cos \beta\tau. \tag{3}$$

Для дисперсии оценки математического ожидания стационарного случайного процесса воспользуемся формулой (2):

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_x(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где T — интервал усреднения;

τ — временной сдвиг между ординатами случайного процесса.

Подставив выражение (3) в формулу (4), получим:

$$\sigma^2 = \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos \omega_1 \tau\, d\tau - \frac{A^2}{T^2} \int_0^T \tau \cos \omega_1 \tau\, d\tau + \frac{2D_n}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) e^{-\alpha(\tau)} \times$$

$$\times \cos \beta\tau\, d\tau. \tag{5}$$

---

* Стационарность случайного процесса вида (1) доказывается в работе [3].

После преобразований, аналогичных тем, которые выполнены в [1], выражение (5) примет вид:

$$\sigma^2 = \frac{2A^2}{T^2\omega_1^2}\cdot\sin^2\frac{\omega_1 T}{2} + \frac{2D_n}{\alpha^2 T^2\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^2}\cdot\left\{e^{-\alpha T}\left[\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\cdot\cos\beta T - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\beta}{\alpha}\sin\beta T\right] + \alpha T\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) - \left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right\}. \tag{6}$$

При определении статистических характеристик случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид (2), интервал усреднения выбирается таким, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\alpha T \geqslant 50. \tag{7}$$

Учитывая это обстоятельство, упростим выражение (6):

$$\sigma^2 = \frac{2A^2}{T^2\omega_1^2}\cdot\sin^2\frac{\omega_1 T}{2} + \frac{2D_n}{\alpha T\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}. \tag{8}$$

Максимальная приведенная среднеквадратичная погрешность будет равна

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{T\omega_1}\sqrt{\frac{1}{k+1}} + \sqrt{\frac{2k}{(k+1)\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\alpha T}}, \tag{9}$$

где $k = \frac{A^2}{2D_n}$ — отношение дисперсий периодической и случайной составляющих.

Для того, чтобы периодическая составляющая не влияла на точность измерения среднего значения, интервал усреднения выбираем равным целому числу периодов этой составляющей

$$T = nT_1, \quad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots). \tag{10}$$

Практически это достигается путем синхронизации работы измерительного устройства с периодом вращения несущего винта вертолета.

При выполнении условий (10) выражение (8) запишется в виде

$$\sigma_1^2 = \frac{2D_n}{\alpha T\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}. \tag{11}$$

Максимальная приведенная среднеквадратичная погрешность будет равна:

$$\sigma_{0_1}^2 = \sqrt{\frac{2k}{(k+1)\left[1+\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right]\cdot\alpha T}}. \tag{12}$$

Чтобы оценить преимущество, которое дает выбор интервала усреднения в соответствии с условиями (10), вычислим величину среднеквадратичной погрешности определения среднего значения случайного процесса, имеющего корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_1\tau + D_n e^{-\alpha(\tau)}\cos\beta\tau.$$

Пусть $T = 2$ *сек*; $T_1 = 0{,}1$ *сек*; $\alpha = 50\ 1/$*сек*; $\beta = 100\ 1/$*сек*., $k=1$.

Подставив значения интервала усреднения T, периода T_1, и параметров корреляционной функции α и β в формулы (9) и (12), найдем:

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{T\omega_1}\sqrt{\frac{1}{k+1}} + \sqrt{\frac{2k}{(k+1)\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha T}} =$$

$$= \frac{2\ сек}{2\ сек\cdot 62{,}8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2\cdot 5\cdot 100}} = 5{,}6\ \%.$$

$$\sigma_{0_1}^2 = \sqrt{\frac{2}{(k+1)\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\alpha T}} = \sqrt{\frac{2}{2\cdot 5\cdot 100}} = 4{,}5\ \%.$$

За счет выбора интервала, согласно условиям (10), среднеквадратичная погрешность определения среднего значения может быть уменьшена в 1,25 раза.

Рассмотрим погрешность определения математического ожидания при дискретном усреднении. В этом случае оценка математического ожидания имеет вид:

$$m_x = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(t_k), \tag{13}$$

где N — число ординат на интервале усреднения $t_0 \div T$.

$$t_k = t_0 + \frac{T}{N}(k-1), \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots N).$$

Дисперсия оценки математического ожидания запишется в виде (2)

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} R(t_i - t_k), \tag{14}$$

где $$t_i - t_k = (i-k)\cdot\frac{T}{N}.$$

Так как $(i - K)$ — постоянное число, то обозначив его l, найдем:

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{N}\sum^{l=(N-1)}\left(1 - {}^{(l)}\right) R(t_l). \tag{15}$$

Корреляционная функция является четной, поэтому (15) перепишем в виде

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{N} R(0) + \frac{2}{N} \sum_{l=1}^{N-1} R\left(\frac{lT}{N}\right) - \frac{2}{N^2} \sum_{l=1}^{N-1} l R\left(\frac{lT}{N}\right). \tag{16}$$

Для того, чтобы периодическая составляющая при дискретном усреднении не вносила дополнительной погрешности, кроме выполнения условий (10), число ординат, взятых за период, должно быть четным.

После подстановки выражения (3) в (16) имеем:

$$\sigma_g^2 = D_n\Big(\frac{1}{N} + \frac{2}{N}\sum_{l-1}^{N-1} \exp\left[-\frac{\alpha T}{N} l\right] \cdot \cos \beta \frac{Tl}{N} - \\ - \frac{2}{N^2} \sum_{l-1}^{N-1} l \exp\left[-\frac{\alpha T}{N} l\right] \cos\beta \frac{Tl}{N}\Big). \tag{17}$$

Упрощая соотношение (17), получим:

$$\sigma_g^2 = D_n\left\{\frac{1}{N} + \frac{2\exp\left[\frac{\alpha T}{N}\right]\cdot\cos\frac{\beta T}{N} - 1}{N\exp\left[2\frac{\alpha T}{N}\right] - 2\exp\left[\frac{\alpha T}{N}\right]\cos\frac{\beta T}{N} + 1} - \right. \\ - \frac{\exp\left[\frac{\alpha T}{N}\right]\left(\exp\left[\frac{2\alpha T}{N}\right]\cdot\cos\frac{\beta T}{N} - 2\exp\left[\frac{\alpha T}{N}\right] + \cos\frac{\beta T}{N}\right)}{\left(\exp\left[\frac{2\alpha T}{N}\right] - 2\exp\left[\frac{\alpha T}{N}\right]\cos\frac{\beta T}{N} + 1\right)^2}. \tag{18}$$

Как и следовало ожидать, при дискретном усреднении периодическая составляющая, так же, как и при непрерывном усреднении, при выполнении условий (10) и четном числе ординат на интервале $O—T$ не влияет на величину погрешности определения математического ожидания.

Величина погрешности (18) по мере увеличения числа ординат N стремится к значению погрешности (12), получаемой при непрерывном усреднении. Это обстоятельство позволяет рассматривать последнюю как предельную, улучшение которой для одного и того же процесса возможно только за счет увеличения интервала усреднения T.

Для сравнения точности измерения среднего значения при дискретном и непрерывном способах усреднения будем считать, что выполняются условия, при которых:

$$\frac{\alpha T}{N} \leqslant 1{,}5, \tag{19}$$

$$\frac{\beta T}{N} \leqslant 1{,}2. \tag{20}$$

Подставив в формулу (18) вместо $\frac{\alpha T}{N}$ и $\frac{\beta T}{N}$ их значения из (19) и (20), найдем величину среднеквадратичной погрешности при дискретном усреднении, которая будет превышать среднеквадратичную погрешность, вычисленную по формуле (11), для $\alpha T = 50$ и $\frac{\beta}{2} = 2$ не более чем по 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Харыбин. Анализ ошибок в определении среднего значения случайной величины и ее квадрата, связанных с конечностью времени наблюдения. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 4, 1957.

2. Е. А. Лифшиц, В. С. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. I, изд. «Сов. Радио», 1963.

3. В. Н. Тихонов Статическая радиотехника. Изд-во «Связь», 1967.