

## О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ВНОСИМОГО ИМПЕДАНСА НАКЛАДНОГО И ЭКРАННОГО ВИХРЕТОКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Впервые достаточно обоснованный метод приближенного вычисления несобственных интегралов, выражающих вносимый импеданс накладного преобразователя, был предложен Ю. М. Шкарлетом. В работе (1) показано, что при разложении коэффициента реакции металла в ряд Маклорена, формальном интегрировании и замене через экспоненту выражения вектор-потенциала поля витка, можно выбрать единый обобщенный аргумент для коэффициента реакции, определяющего свойства контролируемого изделия. Зависимость же от зазора между преобразователем и поверхностью изделия выражаются через экспоненциальный множитель.

Исходя из принятых допущений для совмещенных обмоток преобразователя, предложенные формулы удовлетворяют диапазону зазора  $0,2a—0,8a$  ( $a$  — радиус токовой обмотки) и измерительными катушками радиусом  $(0,5 \div 1)a$ . Полученные формулы довольно просты и удобны для многих расчетов.

Имея точные значения вносимого импеданса, полученные В. С. Соболевым на ЭВЦМ [2], можно определить погрешность формул Ю. М. Шкарлета для случая пластины бесконечной толщины.

Анализ показывает, что имеется значительное расхождение при  $\beta_0 = a\sqrt{\omega\mu_0\sigma} = 1$  для всех величин зазоров и при  $\beta_0 = 8 \div 100$  для зазоров менее  $0,1a$  ( $\omega$  — круговая частота тока питания,  $\sigma$  — электропроводность материала,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума). Особенностью является также то, что приближенные формулы дают не только количественно, но и качественно неправильную оценку, если их применять в случае величин зазоров бо-

лее радиуса токовой катушки. Нетрудно показать экспериментально, что активные и реактивные составляющие с изменением зазора меняются по разным законам и не могут быть выражены с помощью единой экспоненциальной зависимости.

Можно использовать для расчетов другое выражение, полученное Ю. М. Шкарлетом для вносимого импеденса витка над пластиной, а именно:

$$E_{\text{вн}} = \frac{-j\omega\mu_0 I a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{1(0)}^{(n)}}{n!} \int_0^{\infty} I_1^2(\lambda a) e^{-2\lambda h} \lambda^n d\lambda, \quad (1)$$

где  $F_1 = \frac{(\lambda^2 - u^2)(e^{-2ut} - 1)}{(u - \lambda)^2 e^{-2ut} - (u + \lambda)^2}$  — коэффициент реакции металла;

$E_{\text{вн}}$  — вносимое электрическое поле;

$I$  — ток катушки,  $u = \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_0\sigma}$ ; — толщина пластины;

$h$  — зазор между катушкой и металлом;

$I_1(\lambda a)$  — функция Бесселя первого рода.

Вычисляя производные  $F_{1(0)}^{(n)}$

$$F'_{1(0)} = -\frac{2e^{-2kt} + 1}{k e^{-2kt} - 1}, \quad (2)$$

$$F''_{1(0)} = -\frac{4}{k^2} \frac{(1 - e^{-8kt}) + 4e^{-2kt}(1 - e^{-2kt})}{(e^{-2kt} - 1)^3}; \quad k = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}, \quad (3)$$

и т. д., замечаем, что максимальное их значение соответствует производным коэффициента  $F'_{10}$  для токопроводящего полупространства, а именно:

$$F_1^{(n)} = \frac{2n}{k^n} (-1)^{n+1}, \quad (n \geq 1). \quad (4)$$

Далее, определяем величину несобственного интеграла для разных значений  $n$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\lambda h} I_1^2(\lambda a) d\lambda = \frac{1}{\pi a} \left[ \frac{2p^2}{p} K(p) - {}_2E(p) \right] = \frac{j_0(p)}{a}; \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\lambda h} I_1^2(\lambda a) \lambda d\lambda = \frac{hp}{\pi a^3} \left[ \frac{2-p^2}{2(1-p^2)} E(p) - K(p) \right] = \frac{j_1^x(p)}{a^2}; \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\lambda h} I_1^2(\lambda a) \lambda^2 d\lambda = \frac{p^3}{4\pi a^3} \left[ \frac{2p^2-1}{1-p^2} E(p) + K(p) \right] = \frac{j_2(p)}{a^3}; \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\lambda h} I_1^2(\lambda a) \lambda^3 d\lambda = \frac{hp^5}{8\pi a^3} \left[ \frac{13p^2-8p^4-3}{(1-p^2)^2} E(p) + \frac{3-4p^2}{1-p^2} K(p) \right] = \frac{j_3(p)}{a^4}; \quad (8)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h}{2a}\right)^2 + 1}}; E(p) \text{ и } K(p) \text{ — эллиптические интегралы.}$$

Числовые значения интегралов для разных величин зазора представлены в графическом виде на рис. 1. Как видно, с увеличением растет значение интеграла, особенно, когда приближается к нулю.

Однако при  $\frac{h}{a} \geq 0,3$  третья производная превышает нулевую не более чем в 11 раз.

Учитывая это, можно записать формулу (1) в следующем виде:

$$E_{\text{вн}} = \frac{j\omega\mu_0 I a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k^n(n+1)!} \int_0^{\infty} I_1^2(\lambda a) e^{-2\lambda h} \lambda^n d\lambda = \\ & = -\frac{j\omega\mu_0 I}{2} \left[ -f_0(p) + \frac{2}{\beta_*} \times \right. \\ & \times f_1(p) - \frac{2}{2\beta_*^2} f_2(p) + \frac{2f_3}{2\beta_*^3} + \dots \\ & \left. \dots + \frac{(-1)^{n+1} 2f_n(p)}{(n-1)! \beta_*^n} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\beta_* = a \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j) \frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

При значениях  $\beta \geq 14$   $\frac{h}{a} \geq 0,3$  формула принимает вид:

$$E_{\text{вн}} \approx \frac{I j \omega \mu_0}{2} \left[ f_0(p) - \frac{2}{\beta_*} f(p) \right],$$

или

$$\begin{aligned} E_{\text{вн}} &= \frac{I \omega \mu_0 f_0(p)}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\beta} \frac{f_1(p)}{f_0(p)} - f \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\beta} \frac{f_1(p)}{f_0(p)} \right] \right\}, \quad (10) \\ R_{\text{вн}} &= \sqrt{2} \pi \omega \mu_0 \frac{f_1(p)}{\beta}, \end{aligned}$$

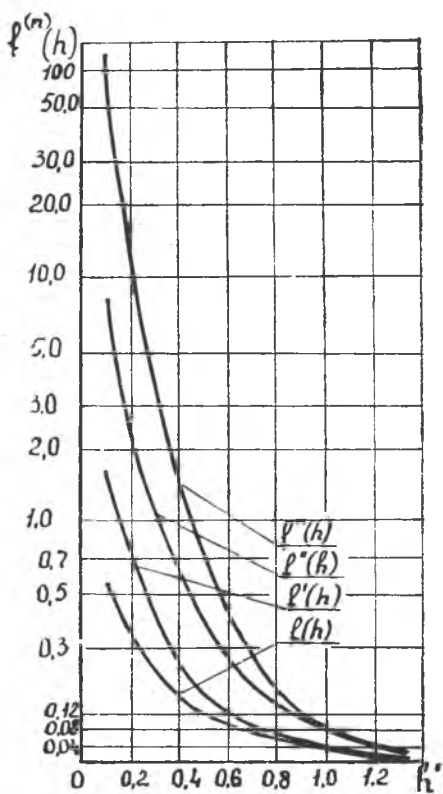


Рис. 1

$$x_{\text{вн}} = -[\omega\mu_0 \pi f_0(p) - R_{\text{вн}}],$$

где  $R_{\text{вн}}$  и  $x_{\text{вн}}$  — вносимое активное и реактивное сопротивление катушки.

Для тех же условий для тонкой токопроводящей пластины получаем

$$F_{\text{вн}} = \frac{-j\omega\mu_0 I}{2} \left[ -f_0(p) + \frac{2}{\beta_*} \frac{e^{-2\beta_* t_1} + 1}{1 - e^{-2\beta_* t_1}} f_1(p) \right], \quad (11)$$

$$R_{\text{вн}} = \frac{\omega\mu_0 \sqrt{2}}{2\beta} f_1(p) \left[ \frac{e^{2\alpha} (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) - 1}{1 - 2e^{\alpha} \cos k + e^{2\alpha}} \right], \quad (12)$$

$$x_{\text{вн}} = \frac{\omega\mu_0}{2} \left[ \frac{1 + e^{2\alpha} (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)}{1 - 2e^{\alpha} \cos \alpha + e^{2\alpha}} \frac{\sqrt{2}}{\beta} f_1(p) - f_0(p) \right], \quad (13)$$

где

$$t_1 = \frac{t}{a'}; \quad \alpha = \frac{\beta t_1}{\sqrt{2}}.$$

Формулы (10—11) особенно удобны для расчета комплексного сопротивления датчика при больших зазорах  $\frac{h}{a} \geq a$ , когда значение  $\beta$  может быть выбрано любым, начиная с 3.

$$z_{\text{вн}} = \pi \omega \mu_0 f_0(p) [d - j(1 - d)], \quad (14)$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{f_1(p)}{f_0(p)}.$$

При этом они остаются справедливыми для различных соотношений диаметров измерительной и токовой катушек, что позволяет их применять при расчете широкого диапазона конструкций преобразователей, работающих на большом зазоре от поверхности объекта контроля (см. соответствующие значения  $f_1(p)$  и  $f_1(\theta)$ ).

Несколько большую точность, по сравнению с формулами Ю. М. Шкарлета, можно получить в диапазоне  $h=0,3 \div 1$  и  $\beta \geq 3$ , если в качестве аргумента разложения коэффициента реакции экрана использовать

$$y = \frac{f_1(p)}{f_0(p)}. \quad (15)$$

В данном случае  $y_1$  получается из равенства  $f_n(z+h) = (-\beta)^n f_0(z+h)$ , когда ограничиваемся только 1-й производной. При этом физически он соответствует волновой проводимости диэлектрика в направлении оси катушки. Аргумент зависит от координат  $z$  и  $\beta$ , что несколько усложняет процесс вычислений, но дает более точную и физически правильную картину.

Кроме того, существенно увеличивается возможный диапазон диаметров измерительных катушек. Так как исходные функции  $f_0(p)$  и  $f_1(p)$  протабулированы [3, 4], определение при известных геометрических характеристиках датчика и зазора не представляет трудности.

Для сравнения в таблице 1 даны некоторые значения вносимого сопротивления катушки, вычисление при  $\frac{h}{a} = 0,5$  и 1 по формулам [1, 2], (10) и (15).

Аналогичный упорядоченный расчет может быть использован для высокочастотных экранных датчиков. Поле, регистрируемое измерительной катушкой под металлом определяется следующей зависимостью:

$$E = -2Ij \omega \mu_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} I_1(\lambda a) I_1(\lambda \rho) \frac{\mu' \lambda e^{-ut} e^{\lambda t} d\lambda}{(u + \mu' \lambda)^2 - (u - \mu' \lambda)^2 e^{-2ut}}, \quad (16)$$

или согласно указанной выше методике,

$$E = -2Iaj \omega \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n)}}{n!} F_{11}^{(n)}(0) \frac{f_n(\rho)}{a^{n+1}}, \quad (17)$$

где

$$F_{11} = \frac{\mu' \lambda u e^{t(\lambda-u)}}{(u + \mu' \lambda)^2 - (u - \mu' \lambda)^2 e^{-2ut}}. \quad (18)$$

При  $\lambda$ , равном нулю, значения производных коэффициента  $F_{11}$  следующие:

$$F_{11}(\lambda=0) = 0; \quad F'_{11}(\lambda=0) = \frac{\mu'}{2k \rho h k t};$$

$$F''_{11}(\lambda=0) = \frac{\mu' (kt - 2\mu' \operatorname{cth} kt)}{k^2 \operatorname{sh} kt};$$

$$F'''_{11}(\lambda=0) = \frac{1,5\mu' (k^2 t^2 - 1)}{k^3 \operatorname{sh} kt} - \frac{1,5\mu' t (4\mu' + 1) \operatorname{cth} kt}{k^2 \operatorname{sh} kt} + \\ + \frac{12\mu'^3 \operatorname{cth}^2 kt}{k^3 \operatorname{sh} kt} - \frac{3\mu'^3}{k^3 \operatorname{sh} kt},$$

где

$$k = \sqrt{j \omega \mu \sigma}$$

$\mu$  — магнитная проницаемость металла,  $\mu'$  — относительная магнитная проницаемость металла.

Учитывая полученные выше соотношения функций  $f_1(\rho)$  и  $f_2(\rho)$ , а также принимая  $\mu' = 1$ , замечаем, что с ростом ( $k$ ) величины производных коэффициента реакции резко уменьшается. Поэтому приближенно можно записать

$$E = \frac{Ij \omega \mu_0 f_1(\rho)}{\beta_* \operatorname{sh} kt} \left[ 1 - \frac{kt \cdot 2\mu' \operatorname{cth} kt}{\beta_*} \frac{f_2(\rho)}{f_1(\rho)} \right]. \quad (18)$$

Для случая больших значений  $\beta_* \geq 10$ , т. е. когда используются либо достаточно высокая частота тока питания, либо большой диаметр датчика, формулу (18) можно еще более упростить и получить достаточно удобные для расчетов выражения изменения

фазы и амплитуды сигнала при высокочастотном контроле толщины листа экраным методом.

$$E = I \omega \mu_0 f_1(\rho) \frac{j}{\beta \operatorname{sh} kt} =$$

$$= I \omega \mu_0 f_1(\rho) \left[ \frac{\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha + \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + j(\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha)}{\sqrt{2} \beta (\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \alpha)} \right], \quad (19)$$

где

$$\alpha = \frac{\beta t_1}{\sqrt{2}}.$$

Относительное значение напряженности поля определяем, поделив выражение (19) на напряженности поля витка

$$E_0 = -\frac{I}{2} j \omega \mu_0 f(\rho),$$

$$E_{\text{отн}} = \frac{f_1(\rho)}{f_0(\rho)} \left[ \frac{(a+b) + j(a-b)}{\sqrt{2} \beta (a^2 + b^2)} \right], \quad (20)$$

где

$$a = \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha,$$

$$b = \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha.$$

Относительное изменение амплитуды сигнала  $A_{\text{отн}}$  для расстояния между катушками  $z \geq 0,45 a$ .

$$A_{\text{отн}} \approx \frac{2}{\beta \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (21)$$

а фазы

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{a+b}. \quad (22)$$

Полученные выражения довольно просты и могут быть использованы для расчета достаточно большого диапазона конструкций высокочастотных экранных датчиков. Характерно, что изменение фазы в данном случае зависит только от одного обобщенного параметра  $\alpha$ , а изменение амплитуды — от двух  $\beta_0$  и  $t$ . Для ферромагнитных материалов ( $t_1 \ll 1$ ,  $kt \gg 1,6$ ) значение  $\operatorname{tg} \varphi$  можно также записать следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\beta}{\mu'} - \operatorname{tg} \alpha \left[ 2\sqrt{2} \frac{f_2(\rho)}{f_1(\rho)} + \frac{\beta}{\mu'} \right]}{\frac{\beta}{\mu'} \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{2} \frac{f_2(\rho)}{f_1(\rho)} + \frac{\beta}{\mu'}}. \quad (23)$$

Если сравнивать амплитудный и фазовый метод регистрации анализа сигнала при толщинометрии экраным датчиком, то предпочтение следует отдать второму. Одним из существенных достоинств фазового метода измерения толщины неферромагнитного металла является линейность и постоянная чувствительность его к

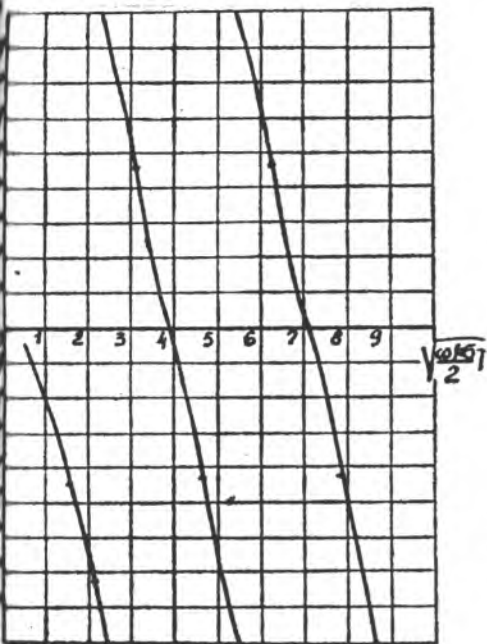


Рис. 2.

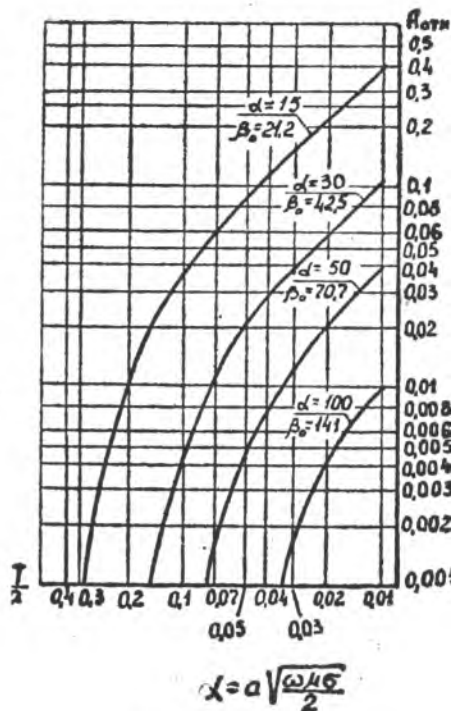


Рис. 3.

толщине. Из рис. 2 нетрудно видеть, что толщина влияет на фазу в квадрат раз сильнее, чем электропроводность, и независимо от значения чувствительность остается постоянной 0,5—75° на 1% изменения величины. Таким образом, чтобы контролировать толщину листа экраным методом с погрешностью в 1%, необходимо применять фазометр, погрешность измерения которого не хуже 0,5%.

Изменение амплитуды сигнала экранного высокочастотного датчика в функции толщины и обобщенного параметра  $\beta_0$  показано на рис. 3.

Нелинейность зависимости амплитуды сигнала от толщины очевидна.

На рис. 4 показана рассчитанная по формуле (23) зависимость фазы сигнала экранного преобразователя от обобщенного параметра  $\beta$ , когда испытуемый лист толщиной 0,1а выполнен из ферромагнитного материала с  $\mu' = 100$ . Кривые построены с учетом второй производной.

Как видно, линейность зависимости показаний фазометра от частоты при толщинометрии остается неизменной: 40° на  $1\beta t$ .

$$\varphi = \alpha z c t g \frac{J_m \frac{E_f}{\delta}}{R_e \frac{E_f}{\delta}}, \text{ где } \frac{E_f}{\delta} = \frac{1 + 207 \mu' \cdot i}{\beta \operatorname{sh}(0,0707 \beta (1+i))}$$

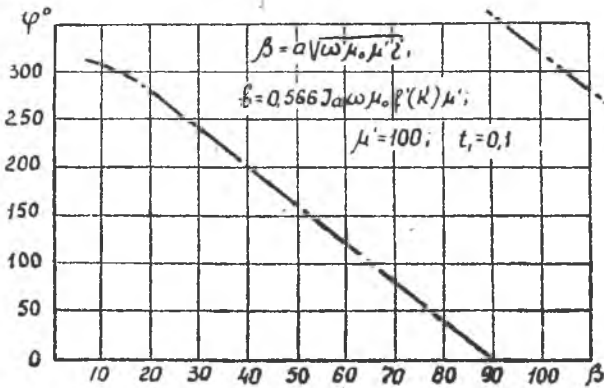


Рис. 4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Шкарлет. Некоторые вопросы теории метода вихревых токов и расчет накладных датчиков. Сб. «Не разрушающие методы контроля материалов и изделий», Онтиприбор, М., 1964.
2. В. С. Соболев. Анализ реакции плоских проводящих образцов конечной толщины на накладную катушку. Сб. «Не разрушающие методы контроля материалов и изделий». Онтиприбор, М., 1964.
3. Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров. Теоретические основы электротехники, ч. 3, Госэнергоиздат, Л., 1954.
4. Ф. М. Каменецкий. О возможности измерений при помощи совмещенных контуров в электроразведке методом становления поля, «Геофизическая разведка», № 12, стр. 62, 1963.