В. И. Квальвассер, В. М. Хорольский

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Показано, что основные результаты корреляционной теории случайных процессов могут быть распространены на моментную теорию четного порядка случайных процессов.

Рассмотренные в работе вопросы представляют интерес для построения более полной теории преобразования моментов случайных функций, что имеет непосредственное приложение к вероятностным методам расчета систем автоматического регулирования.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Для того, чтобы распространить известные свойства моментных функций 2-го порядка на моментные функции (м. ф.) четного порядка, определим начальные и центральные моментные функции (н. м. ф., ц. м. ф.) соответственно следующим образом:

$$\varGamma_x(t_1 \dots t_n) \quad M\left\{x(t_1) \dots x(t_n)\overline{x(t_{\kappa+1})} \dots \overline{x(t_n)}\right\},$$

$$k_x(t_1 \dots t_n) \quad M\left\{x^0(t_1) \dots x^0(t_\kappa)\overline{x^0(t_{\kappa+1})} \dots \overline{x(t_n)}\right\},$$

где $x^0(t) = x(t) - Mx(t)$ — центрированный случайный процесс (с. п.), $n \quad 2\kappa$.

Из определения м. ф. следует

$$\varGamma_x(t_n \dots t_1) = \overline{\varGamma_x(t_1 \dots t_n)}. \tag{1.1}$$

Обозначим:

$$M\,|\,x(t)\,|^n \quad \varGamma_{x,n}(t).$$

На основании обобщенного неравенства Гёльдера [3] можно записать

$$|\,\varGamma_x(t_1 \dots t_n)\,|^n \quad \varGamma_{x,n}(t_1) \dots \varGamma_{x,n}(t_n). \tag{1.2}$$

Пусть $\varphi(t)$ произвольная функция. Тогда

$$\int\limits_T \ldots \int\limits_T \Gamma_x(t_1 \ldots t_n)\, \varphi(t_1) \ldots \varphi(t_k)\, \overline{\varphi(t_{k+1})} \ldots, \overline{\varphi(t_n)}\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$M \left| \int\limits_T x(t)\, \varphi(t)\, dt \right|^n \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Назовем функции $\Gamma_x(t_1 \ldots t_n)$, удовлетворяющие соотношению (1.3), положительно определенными н. м. ф. n-го порядка. Свойства (1.1), (1.2), (1.3) являются обобщением известных свойств н. м. ф. второго порядка [1].

Если с. п. $x(t)$ имеет начальный абсолютный момент порядка κ, $(0 < \kappa < \infty)$, то $x(t)$ имеет начальные моменты всех положительных порядков $r \leqslant \kappa$, т. к.

$$Mx^r(t) \leqslant M\,|x(t)|^r \leqslant M\,|x(t)|^k. \tag{1.4}$$

Если случайный процесс $x(t)$ имеет абсолютный момент порядка κ, то при любых a_1 и a_2 $(0<a_1<a_2<\kappa)$.

$$\sqrt[a_1]{M\,|\,x(t) - \alpha(t)\,|^{a_1}} \leqslant \sqrt[a_2]{M\,|\,x(t) - \alpha(t)\,|^{a_2}} \leqslant \sqrt[\kappa]{M\,|\,x(t) - \alpha(t)\,|^k}, \tag{1.5}$$

где $\alpha(t)$ — любая функция.

Последнее неравенство для случайных величин доказано (см., например, [2]).

В случае, если $\Gamma_x(t_1 \ldots t_n) < \infty$, то линейное замыкание случайных величин $x(t)$, $(t_i \in T,\ i = 1 \ldots n)$ образует нормированное пространство с нормой

$$\|\,x(t)\,\| = \sqrt[n]{M\,|\,x(t)\,|^n}\,.$$

Первые две аксиомы нормированных пространств, очевидно, выполняются. Третья аксиома (неравенство треугольника) следует из неравенства Минковского

$$\sqrt[n]{M\,|\,y(t) - x(t)|^n} \leqslant \sqrt[n]{M\,|\,x(t)\,|^n} + \sqrt[n]{M\,|\,y(t)\,|^n}\,.$$

В дальнейшем окажется полезным следующее определение непрерывности с. п. Случайный процесс $x(t)$ называется непрерывным в среднем n-го порядка в точке t, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} M\,|\,\xi(t + \Delta t) - \xi(t)\,|^n = 0$$

Приведем следующие простые теоремы.

Теорема 1. Из условия непрерывности математического ожидания $m_x(t) = M_x(t)$ непрерывности в среднем n-го порядка центрированного с. п. в точке t вытекает непрерывность в среднем n-го порядка с. п. $x(t)$. Из непрерывности в среднем n-го порядка с. п. $x(t)$ следует непрерывность $m_x(t)$ и $x^0(t)$.

Теорема легко доказывается на основании неравенства (1. 4) и неравенства

$$\left| \|a\| - \|b\| \right| \leqslant \|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|, \tag{1.6}$$

если положить

$$a = x^0(t) - x^0(t'), \ b = m_x(t) - m_x(t').$$

Теорема 2. С. п. $x(t)$ непрерывен в среднем n-го порядка на замкнутом интервале $0 \leqslant t \leqslant a$, если н. м. ф. n-го порядка непрерывна в любой точке диагонали n-мерного параллелепипеда $0 \leqslant t_i \leqslant a_i$ $(i = 1 \ldots n)$ в направлении, параллельном хотя бы одной координатной оси. При этом н. м. ф. n-го порядка непрерывна по n переменным внутри n-мерного параллелепипеда.

Из свойств симметрии н. м. ф. n-го порядка следует, что м. ф. непрерывна в направлении координатных осей в произвольной точке, лежащей на диагонали n-мерного параллелепипеда, т. е. по любому направлению.

Отсюда вытекает непрерывность в среднем n-го порядка с. п. $x(t)$.

Покажем, используя (1,2), что н. м. ф. непрерывна в любой точке, лежащей внутри n-мерного параллелепипеда, если с. п. $x(t)$ непрерывен в среднем n-го порядка в интервале $0 \leqslant t \leqslant a$.

Действительно,

$$| \Gamma_x(t_1 + \Delta t_1, \ \ldots, \ t_n + \Delta t_n) - \Gamma_x(t_1 \ldots t_n) | \leqslant$$
$$\leqslant | M \{x(t_1 + \Delta t_1) \ldots \overline{x(t_{n-1} + \Delta t_{n-1})} \ [\overline{x(t_n + \Delta t_n)} - \overline{x(t_n)}]\} | + \ldots$$
$$+ | M \{[x(t_1 + \Delta t_1) - x(t_1)] \, x(t_2) \ldots \overline{x(t_n)}\} < \varepsilon,$$

если $|\Delta t_i| < \delta$, $(i = 1 \ldots n)$.

Из последнего неравенства вытекает:

Теорема 3. Если с. п. $x(t)$ непрерывен в среднем n-го порядка на замкнутом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, то н. м. ф. n-го порядка непрерывна в любой точке n-мерного параллелепипеда

$$0 \leqslant t_i \leqslant T, \ (i = 1 \ldots n).$$

Очевидно, что точки разрыва м. ф. могут располагаться только на многообразиях $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t_0$, для которых точка t_0 является точкой разрыва с. п. $x(t)$.

Теорема 4. Если с. п. $x_1(t) \ldots x_n(t)$ непрерывны в среднем n-го порядка, то их взаимные н. м. ф. n-го порядка непрерывны. Теоремы 1—4 остаются верными и для ц. м. ф. с очевидными изменениями, вытекающими из теоремы 1.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятием предела в среднем n-го порядка, т. е.

$$x_m(t) \xrightarrow[m \to \infty]{n} x(t) \quad \text{или} \quad \overset{n}{\lim_{m \to \infty}} x_m(t) = x(t),$$

если

$$\lim_{m\to\infty} M \mid x_m(t) - x(t)^n = 0.$$

Теорема 5. Если $M \mid x_m(t) \mid^n < \infty$, $(m = 1 \ldots)$ и $x_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{n} x(t)$, то существует н. м. ф. n-го порядка с. п. $x(t)$ взаимные н. м. ф. n-го порядка с. п. $x(t)$ и $x_m(t)$ и выполняются равенства.

$$\lim_{m\to\infty} M\{x(t_1) \ldots x(t_i)\, x_m(t_{i+1}) \ldots x_m(t_k)\, \overline{x_m(t_{k+1})} \ldots \overline{x_m(t_n)}\}\Big|_{t_1 = \ldots = t_n = t} =$$

$$= \Gamma_x(t_1 \ldots t_n)\Big|_{t_1 = \ldots = t_n = t}, \quad i = 0 \ldots n - 0. \qquad (1.7)$$

Выполнение последних равенств является и достаточным условием сходимости

$$x_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{n} x(t).$$

Необходимость. Если положить $a = x_m(t)$, $b = x(t) - x_m(t)$, то из (1.6) вытекает, что $M \mid x(t) \mid^n < \infty$. Т. е. существует н. м. ф. процесса $x(t)$ и взаимные н. м. ф. случайных процессов $x(t)$ и $x_m(t)$. Замечая, что

$$\lim M\{x(t_1) \ldots \overline{x(t_{n-1})}\,[\overline{x(t_n)} - \overline{x_m(t_n)}]\} = 0,$$

получим, что соотношения (1.7) выполняются для $i = n - 1$.

Аналогично используя соотношение (1.2), проверяются остальные равенства.

Достаточность. Пусть выполняются равенства (1.7) тогда

$$\lim_{m\to\infty} M \mid x(t) - x_m(t) \mid^n = \lim_{m\to\infty} M\{[x(t) - x_m(t)] \ldots [\overline{x(t)} - \overline{x_m(t)}]\} = 0.$$

Следствие 1. Последовательность взаимных н. м. ф. n-го порядка с. п. $x_m(t)$ $y(t)$ $(M \mid y(t)^n < \infty)$ сходятся соответственно к взаимной н. м. ф. n-го порядка с. п. $x(t)$, $y(t)$.

Следствие 2. Из соотношений (1.4), (1.6) вытекает, что

$$Mx(t) < \infty \text{ и } \lim_{m\to\infty} Mx_m(t) = Mx(t), \lim_{m\to\infty} x^0{}_m(t)_m \overset{n}{=} x^0(t)$$

и наоборот, если

$$x^0_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{n} x^0(t). \quad Mx_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} Mx(t),$$

то $x_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{n} x(t)$.

Следствие 3. Теорема остается верной и для ц. м. ф. с очевидными изменениями, вытекающими из следствия 2.

З а м е ч а н и е. Если равенства (1.7) выполняются в смысле обобщенных функций, то также считаем, что

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t) = x(t).$$

ПРЯМОЙ И ОБРАТНЫЙ ФОРМИРУЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ n-го ПОРЯДКА

Уточним, что нужно понимать под областью значений линейного оператора, если областью определения являются случайные процессы. Как правило, оператор включает в себя некоторый предельный переход. Причем предельный переход осуществляется по метрике данного пространства. Условно можно записать

$$x(t) = A_\lambda^t z(\lambda) = \overset{n}{\lim} \tilde{A} z(\lambda),$$

т. е.

$$\lim M \mid x(t) - Az(\lambda) \mid^n = 0.$$

Структура оператора $\tilde{A}$ определяется оператором A^* и $Az(\lambda)$ очевидно, зависит от линейной комбинации конечного числа значений $xz(\lambda)$ при различных значениях аргумента.

Например, для оператора $A = \frac{d}{dx}$,

$$\tilde{A}(z)\lambda = \frac{z(\lambda + \Delta\lambda) - z(\lambda)}{\Delta\lambda}.$$

Тогда в силу линейности оператора A операция математического ожидания и оператора $\tilde{A}$ переместительны.

Т е о р е м а 6. Если $M \mid \tilde{A} z(\lambda)^n < \infty$ и $\overset{n}{\lim} \tilde{A} z(\lambda) = Az(\lambda) = x(t)$, то существует н. м. ф. n-го порядка с. п. $x(t)$, взаимные н. м, ф. n-го порядка с. п. $x(t)$ и $\tilde{A} z(\lambda)$ и выполняются равенства

$$A_{\lambda_{i+1}} \cdots A_{\lambda_k} \overline{A}_{\lambda_{k+1}} \cdots \overline{A}_{\lambda_n} M \{x(t_1) \cdots x(t_i) z(\lambda_{i+1}) \cdots$$
$$\cdots z(\lambda_k) \overline{z(\lambda_{k+1})} \cdots \overline{z(\lambda_n)}\} \mid t_1 \cdots t_n =$$
$$= \Gamma_x(t_1 \cdots t_n) \mid t = \cdots t_n = t \quad (i = 0 \ldots n-1). \tag{2.1}$$

Выполнение последних равенств является и достаточным условием сходимости

$$\tilde{A} z(\lambda) \overset{n}{\rightarrow} Az(\lambda) = x(t).$$

Сформулированная теорема вытекает из теоремы 5, если принять $x_n(t) = \tilde{A} z(\lambda)$, $x(t) = Az(\lambda)$. Тем более, теорема остается верной, если оператор A не включает предельного перехода.

* Запись A_λ^t означает, что функция аргумента λ переводится оператором в функцию аргумента t.

Следствие 1. Если $M \mid \xi(t) \mid^n < \infty$, то для с. п. $\xi(t)$ выполняются соотношения

$$M\{\xi(t_1)\cdots\xi(t_i)\,x(t_{i+1})\cdots x(t_k)\overline{x(t_{k+1})}\cdots\overline{x(t_n)}\} =$$
$$= A\lambda_{i+1}\cdots A_{\lambda_k}\overline{A}_{\lambda k+1}\cdots\overline{A}\lambda_n\, M\{\xi(t_1)\cdots\xi(t_i)z(\lambda_{i+1})\cdots$$
$$\cdots z(\lambda_k)\overline{z(\lambda k+1)}\cdots\overline{z(\lambda_n)}\}.$$

Следствие 2. В условиях теоремы вытекает, что

$$Am_z(\lambda) < \infty, \quad Am_z(\lambda) = m_x(t), \quad Az^0(\lambda) = x^0(t),$$

и наоборот, если

$$Az^0(t) = y(\lambda), \; Am_z(\lambda) = m_z(t),$$
$$\text{то} \quad Az(\lambda) = x(t).$$

Следствие 3. Знак математического ожидания и оператора А переместимы. *С. п.* $x(t) = Az(\lambda)$ существует, если существует

$$A_{\lambda_1}^{t_1}\cdots A_{\lambda_n}^{t_n}\Gamma_2(\lambda_1\cdots\lambda_n)\mid.$$

Следствие 4. Определим с. п. $x(t)$ следующим образом

$$M\{x(t_1)\cdots x(t_i)z(\lambda i+1)\cdots z(\lambda_k)\overline{z(\lambda_{k+1})}\cdots\overline{z(\lambda_n)}\}\mid_{t_1=\cdots t_n=t} =$$
$$= A_{\lambda_1}\cdots A_{\lambda_i}\Gamma_2(\lambda_1\cdots\lambda_n)\mid_{t_1=\cdots t_n=t}, \; (i=1\cdots n), \tag{2.2}$$

тогда $x(t) = Az(\lambda)$. Действительно, легко заметить, что условия (2.2) и (2.1) эквивалентны.* Следовательно, если

$$A_{\lambda_1}^{t_1}\cdots A_{\lambda_n}^{-t_n}\Gamma_2(\lambda_1\cdots\lambda_n)\mid_{t_1=\cdots=t_n=t} < \infty,$$

то выполнение соотношений (2.1) или (2.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$x(t) = Az(\lambda).^{**}$$

Проанализируем условия (2.2). Случайный процесс $Az(\lambda)$ дает наилучшую оценку по критерию минимума средней ошибки n-го порядка заданного с. п. $x(t)$, если выполнены уравнения (2.2) для $i = 1 \ldots n-1$. Действительно пусть C — произвольный оператор, отличный от A, тогда, используя уравнения (2.2) при $i = 1 \ldots n-1$, получим:

$$M \mid x(t) - cz(\lambda) \mid^n$$
$$= M \mid x(t^n) + M \mid cz(\lambda) \mid - Az(x) \mid^n M \mid Az(\lambda) \mid^n.$$

---

* Следствия 1, 2 вытекают соответственно из аналогичных следствий теоремы 5.

* Считаем, что $x(t) = Az(\lambda)$, если выполняются соотношения (2,1) или (2,2) в смысле обобщенных функций.

** Заметим, что теоремы 5,6 остаются верными, если потребовать выполнения условий 2,1, 2,2 и для различных значений $t_1 \ldots t_n$.

Отсюда вытекает, что средняя ошибка n-го порядка минимальна, если $C = A$ и равна

$$M \mid x(t) - Az(\lambda) \mid^n = M \mid x(t) \mid^n - M \mid Az(\lambda) \mid^n.$$

Если, кроме того, выполнено уравнение (2.2) для $i = n$, то средняя ошибка n-го порядка равна нулю.

Рассмотрим задачу о возможности определения линейных операторов A и B, удовлетворяющих условиям

$$x(t) = Az(\lambda). \tag{2.3}$$

$$z(\lambda) = Bx(t), \quad (\lambda \in \Delta, \ t \in T), \tag{2.4}$$

где $x(t)$, $z(\lambda)$ — заданные с. п.

Поставленную задачу назовем проблемой построения прямого и обратного формирующего фильтра.

На основании следствия 4 запишем необходимые и достаточные условия существования представлений (2.3), (2.4).

Отсюда вытекает

$$\Gamma_x(t_1 \cdots t_n) = A_{\lambda_1} \cdots \bar{A}_{\lambda_n} \Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n), \tag{2.5}$$

$$\Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = B_{t_1} \cdots \bar{B}_{t_n} \Gamma_x(t_1 \cdots t_n), \tag{2.6}$$

$$M\{x(t_1) \ldots x(t_k)\overline{x(t_{k+1})} \cdots \overline{x(t_i)}\, \overline{Z(\lambda_i)} \cdots \overline{Z(\lambda_n)}\} =$$

$$= A_{\lambda_1} \cdots A_{\lambda_k} \bar{A}_{\lambda_{k+1}} \cdots \bar{A}_{\lambda_i} \Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n); \quad (i = 1 \cdots n-1), \tag{2.7}$$

$$M\{z(\lambda_1) \cdots z(\lambda_k)\overline{z(\lambda_{k+1})} \cdots \overline{z(\lambda_i)}\, \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\} =$$

$$B_{t_1} \cdots B_{t_k} \bar{B}_{t_{k+1}} \cdots \bar{B}_{t_i} \Gamma_z(t_1 \cdots t_n); \ (i = 1 \cdots n-1). \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.7), (2.8), получим:

$$A_{\lambda_1} \cdots A_{\lambda_k} \bar{A}_{\lambda_{k+1}} \cdots \bar{A}_{\lambda_i} \Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n) =$$

$$= \bar{B}_{t_n} \cdots \bar{B}_{t_{i+1}} \Gamma_x(t_1 \cdots t_n); \quad (i - 1 \cdots n-1). \tag{2.9}$$

Полагая $i = n-1$, 1 в (29), получим с учетом (2.5), (2,6):

$$\Gamma_x(t_1 \cdots t_n) = A_{\lambda_n} B_{t_n} \Gamma_x(t_1 \cdots t_n), \tag{2.10}$$

$$\Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = B_{t_1} A_{\lambda_1} \Gamma_z(\lambda_1 \cdots \lambda_n). \tag{2.11}$$

Отсюда вытекает

Теорема 7. Для представления с. п. $x(t)$ и $z(\lambda)$ в виде (2.3—4) необходимо и достаточно, чтобы операторы A и B удовлетворяли уравнениям (2.5), (2.11) или (2.6), (2.10) или условиям (2.10—11) и хотя бы одному из уравнений (2.9).

Замечание. Если вместо (2.10—11) потребовать соответственно выполнение уравнений

$$AB = E, \quad BA = E$$

или

$$B_t \delta(\lambda - \lambda') = \delta(\lambda - \lambda'), \qquad A_\lambda B_t \delta(t - t') = \delta(t - t'), \tag{2.12}$$

или $A = B^{-1}$, то условия теоремы становятся достаточными для возможности представления (2.3—4).

Проблема формирующего фильтра n-го порядка является частной задачей определения оптимального оператора, когда минимум средней ошибки n-го порядка равен нулю.

Если заданы смешанные начальные моменты n-го порядка случайных процессов $x(t)$ и $z(\lambda)$, то уравнения (2.7—8) определяют оптимальные операторы A и B.

В качестве примера рассмотрим определенный класс операторов

$$x(t) = Ar(\lambda) = \int_\Delta z(\lambda)\cdot\varphi(t, \lambda)\, d\lambda, \tag{2.12}$$

$$z(\lambda) = Bx(t) = \int_T x(t)\overline{\psi(t, \lambda)}\, dt. \tag{2.13}$$

Указанные представления для с. п. существуют, если

$$\int_\Delta \varphi(t, \lambda)\,\overline{\psi(t', \lambda)}\, d\lambda = \delta(t - t'). \tag{2.14}$$

$$\int_T \varphi(t, \lambda')\,\overline{\psi(t, \lambda)}\, dt = \delta(\lambda - \lambda'), \tag{2.15}$$

и выполнено одно из уравнений (2.5—2.6), (2.9).
Выпишем только уравнения (2.5), (2.6).

$$\Gamma_x(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \int_{T_1} \cdots \int_{T_n} \Gamma_x(t_1 \cdots t_n)\overline{\psi(t_1, \lambda_1)} \cdots \psi(t_n \lambda_n)\, dt_1 \cdots dt_n, \tag{2.16}$$

$$\Gamma_x(t_1 \cdots t_n) = \int_{\Delta_1} \cdots \int_{\Delta_n} \Gamma_2(\lambda_1 \cdots \lambda_n)\, \varphi(t_1, \lambda_1) \cdots \overline{\varphi(t_n, \lambda_n)}\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n. \tag{2.17}$$

В частном случае, если

$$\varphi(t, \lambda) = e^{it\lambda}, \quad \psi(t, \lambda) = \frac{1}{2n} e^{it\lambda}, \ (t, \ \lambda \in -\infty, \ \infty),$$

условия (2.14—15) удовлетворяются. Из уравнений (2.16—2.17) следует, что если $\Gamma_x(t_1 \cdots t_n)$ возможно представить в виде интеграла Фурье, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda) e^{it\lambda}\, d\lambda, \tag{2.18}$$

$$z(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-it\lambda}\, dt. \tag{2.19}$$

Рассмотрим другой класс операторов

$$x(t) = Az(\lambda) = \sum_{j}^{\infty} z(\lambda_j)\varphi_j(t).$$

$$z(\lambda_j) = \int_T x(t)\overline{\psi_j(t)}\,dt, \quad (j = 1 \cdots).$$

Указанные представления для с. п. существуют, если

$$\sum_{j}^{\infty} \psi_j(t')\overline{\varphi_j(t)} = \delta(t - t'), \tag{2.20}$$

$$\int_T \varphi_i(t)\overline{\psi_j(t)}\,dt = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1 \cdots), \tag{2.21}$$

и выполнено хотя бы одно из уравнений (2.5,) (2.6).

$$\Gamma_z(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}) = \int_{T_1} \cdots \int_{T_n} \Gamma_x(t_1 \cdots t_n)\overline{\psi_{i_1}(t_1)} \cdots \psi_{i_n}(t_n)\,dt_1 \cdots dt_n, \tag{2.22}$$

$$(i_1 \cdots i_n = 1, 2 \cdots)$$

$$\Gamma_x(t_1 \cdots t_n) = \sum_{i_1 \cdots i_n}^{\infty} k_2(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n})\,\varphi_{i_1}(t_1) \cdots \overline{\varphi_{i_n}(t_n)}. \tag{2.23}$$

В частном случае, если $\psi_j(t) = \frac{1}{2T} e^{\omega_j t i}$; $\varphi_j(t) = e^{\omega_j t i}$;

$$0 < t < T, \quad \omega_j = \frac{\pi j}{T},$$

условия (2.20 – 2.21) удовлетворяются. Из уравнений (2.22 – 2.23) следует, что если $\Gamma_x(t_1 \cdots t_n)$ разлагается в ряд Фурье, то

$$x(t) = \sum_{j}^{\infty} z(\lambda_j)\, e^{i\omega_j t}. \tag{2.24}$$

$$z(\lambda_j) = \frac{1}{2T}\int_T x(t)\, e^{i\omega_j t} \cdot dt, \quad (j = 1, 2 \ldots). \tag{2.25}$$

3. БЕЛЫЙ ШУМ n-ГО ПОРЯДКА

Пусть центральный момент n-го порядка для с. п. $z(t)$ выражается следующим образом

$$k_2(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = C(\lambda_n)\,\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots \delta(\lambda_{n-1} - \lambda_n), \tag{3.1}$$

и $Mz(\lambda) = 0$. По аналогии с белым шумом можно назвать случайный процесс $z(\lambda)$ белым шумом n-го порядка, $G(\omega)$ — интенсивностью белого шума n-го порядка*.

---

*) Если $z(\lambda)$ — белый шум n-го порядка, то условие (2.11) принимает вид $B_t A_\lambda\, \delta(\lambda - \lambda') = \delta(\lambda - \lambda')$. Если операторы A и B — сопряженные, то из последнего равенства вытекает $A_\lambda B_t\, \delta(t - t') = \delta(t - t')$,

Для случайных величин введем понятие некоррелированности n-го порядка.

Случайные величины $z_{i_1} \cdots z_{i_n}$ назовем некоррелированными n-го порядка, если

$$M\left[z_{i_1} \cdots z_{i_k} \overline{z_{i_{k+1}}} \cdots \overline{z_{i_n}}\right] = \delta_{i_1 \cdots i_n}, \tag{3.2}$$

где

$$\delta_{i_1 \cdots i_n} = \begin{cases} 1, \text{ если } i_1 = \cdots = i_n \\ 0, \text{ если } i_j = i_k; \ (i, j = 1 \ldots). \end{cases}$$

Заметим, что определение формирующего фильтра n-го порядка для любых с. п. можно свести к той же задаче, только для определенных процессов (например, белый шум n-го порядка). Действительно, для определения представлений

$$y(t) = A\, m(\lambda) \text{ и } m(\lambda) = By(t),$$

где $y(t)$ и $m(\lambda)$ — заданные случайные процессы, можно применить следующий прием. Сначала определяются операторы

$$y(t) = Cz(\lambda), \quad z(t) = Dy(\lambda),$$

$$m(\lambda) = \varepsilon z(t), \quad z(\lambda) = Km(t),$$

где $z(\lambda)$ — белый шум n-го порядка.

Затем, замечая, что:

$$Am(\lambda) = Ckm(t),$$

$$By(t) = CDy(\lambda),$$

получим:

$$A = CK, \quad B = ED.$$

Понятие белого шума n-го порядка может оказаться полезным при определении оптимальных операторов по критерию минимума средней ошибки n-го порядка. Относительно уравнений (2.7) можно заметить следующее. Если для некоторого случайного процесса $z(\lambda)$ (белый шум n-го порядка) известен оптимальный оператор C

$$C_{\lambda_1} \cdots \overline{C}_{\lambda_i} \Gamma_2(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = M\left\{y(t_1) \cdots \overline{y(t_i)}\, \overline{z(\lambda_{i+1})} \cdots \overline{z(\lambda_n)}\right\},$$

$$(i = 1 \cdots n - 1; \ \lambda_i \in \Delta; \ t_i \in T) \tag{3.3}$$

и можно найти операторы A и B, что $x(t) = Az(\lambda)$ $z(\lambda) = Bx(t)$, то для определения оптимального оператора случайного процесса $x(t)$ применим к правым и левым участкам уравнений (3.3) оператор $\overline{A}_{\lambda_{i+1}} \cdots \overline{A}_{\lambda_n}$ $(i = 1 \cdots n - 1)$. Получим:

$$C_{\lambda_1} \cdots \overline{C}_{\lambda_i} M\left\{z(\lambda_1) \cdots \overline{z(\lambda_i)}\, \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\right\} =$$

$$= M\left\{y(t_1) \cdots \overline{y(t_i)}\, \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\right\}, \ (i = 1 \cdots n - 1),$$

где с. п. $y(t)$ подлежит воспроизведению. Используя

$$B_{t_1} \cdots \overline{B}_{t_i}\, M\left\{x(t_1) \cdots \overline{x(t_n)}\right\}$$

$$M\left\{z(\lambda_1) \cdots \overline{z(\lambda_i)}\ \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\right\},$$

$$(i \quad 1 \cdots n - 1)$$

получим:

$$C_{\lambda_1} B_{t_1} \cdots \overline{C}_{\lambda_i} \overline{B}_{t_i} \Gamma_x\ (t_1 \cdots t_n)$$

$$M\left\{y(t_1) \cdots \overline{y(t_i)}\ \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}. \right\},\ (i \quad 1 \cdots n \quad 1).$$

Т. е. оператор СВ является оптимальным. Т. к. обычно задаются

$$M\left\{y(t_1) \cdots \overline{y(t_i)}\ \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\right\} \quad (i \quad 1 \cdots n \quad 1),$$

то оператор C нужно определить из уравнений

$$C_{\lambda_1} \cdots \overline{C}_{\lambda_i} \Gamma_z (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$$

$$\overline{B}_{t_n} \cdots \overline{B}_{t_{i+1}} M\left\{y(t_1) \cdots \overline{y(t_i)}\ \overline{x(t_{i+1})} \cdots \overline{x(t_n)}\right\}. \}.$$

$$(i \quad 1 \cdots n \quad 1)$$

Покажем также, что возможно распространить методику определения корреляционных функций при линейных преобразованиях случайных процессов на моментные функции. Пусть, например, задан оператор линейной системы A и $x(t)$ — входное возмущение, а $y(t)=Ax(\lambda)$ — выходное возмущение. Считаем, что известно представление случайного процесса $x(t)$ через белый шум n-го порядка в виде (2.12). Тогда:

$$y(t) \quad \int_{\Delta} z(\lambda)\, \varphi(t, \lambda)\, d\lambda \quad m_y\ (t),$$

где

$$(t,\ \lambda) \quad A_s \varphi(t, s) \quad m_y\ (t) \quad A m_x (s).$$

Моментная функция на выходе линейной системы определится формулой

$$k_y\ (t_1 \cdots t_n) \quad \int_{\Delta} G(\lambda_n) \varnothing (t_1, \lambda_n) \cdots \overline{\varnothing (t_n, \lambda_n)}\, d\lambda_n. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим следующий пример. Определим ц. м. ф. n-го порядка действительного с. п. $x(t)$, который скачком изменяет свое значение в случайные независимые друг от друга моменты времени, а в промежутках между этими моментами времени сохраняет неизменные значения, представляющие собой независимые в совокупности случайные величины, имеющие равные нулю математические ожидания и один и тот же момент n-го порядка $M(\xi) = h^n$.

Пусть α — математическое ожидание числа точек изменения с. п. $x(t)$ в течение единицы времени. Введем вспомогательную случайную величину y, принимающую значение нуль, если в интервалах

$[t_1, t_2] \dots [t_{n-1}\, t_n]$ с. п. $x(t)$ постоянен и единица, если в каком-либо интервале есть хотя бы одна точка пересечения, тогда

$$p(y = 0) = e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|}$$

$$p(y = 1) = 1 - e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|},$$

$$k_x(t_1 \cdots t_n) = M[x(t_1) \cdots x(t_n)_0]\, e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|} +$$

$$+ M[x(t_1) \cdots x(t_n)_1]\left(1 - e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|}\right) =$$

$$= M|x(t)|^n\, e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|} =$$

$$= h^n e^{-\alpha|t_1-t_2|} \cdots e^{-\alpha|t_i-t_{i+1}|} \cdots e^{-\alpha|t_{n-1}-t_n|}.$$

Положим $h^n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}$ и $\alpha \to \infty$, тогда получим:

$$\lim K_x(t_1 \dots t_n) = \delta(t_1 - t_2) \cdots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Замечаем, что сила каждого импульса бесконечно велика,

$$h = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

длительность импульса $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2h^{\frac{n}{n-1}}}$ и интенсивность каждого импульса

$$h\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

бесконечно мала.

4. СТАЦИОНАРНОСТЬ n-ГО ПОРЯДКА

Будем называть с. п. $x(t)$ стационарным n-го порядка, если

$$M x(t) = \text{const}, \quad n = 2k,$$

$$k_x(t_1 \cdots t_n) = k_x(t_1 + \cdots + t_k - t_{k+1} - \cdots - t_n) = k_x(r). \qquad (4.1)$$

Отметим некоторые свойства с. п., обладающих стационарностью n-го порядка.

$$k_x(-r) = \overline{k_x(r)},$$

$$|k_x(r)| \leq k_x(0) = M|x(t)|^n.^*$$

Условие (4.1) обозначает, что статистические свойства, определяемые моментом n-го порядка, не зависят от положения точек

---

* Заметим, что $k_x(r) = M\{x(r)\, x(0) \cdots \overline{x(0)}\}$. Если $y(t) = \frac{d^p}{dt^p}\, x(t)$, то $k_y(r) = (-1)^{np}\frac{d^{np}}{dr^{np}}\, k_x(r)$. Из непрерывности в нуле $k_x(r)$ вытекает непрерывность с. п. $x(t)$.

$t_1 \dots t$, а зависят от их взаимного расположения, т. е. от суммы расстояний между точками $t_1 \dots t$ и $t_{k+1} \dots t_n$. Рассмотрим вопрос о связи с. п. стационарного n-го порядка с. п., являющимся белым шумом n-го порядка. В том случае, если $z(\lambda)$ является белым шумом n-го порядка, то представления (2.18—2.19) имеют место, если выполнено уравнение (2.17).

$$k_x\ (t_1 \cdots t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda_n)\, e^{it_1\lambda_n} \cdots e^{-it_n\lambda_n}\, d\lambda_n.$$

Если $k_x\,(r)$ возможно представить в виде интеграла Фурье, то последнее уравнение выполняется, поэтому

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda)\, e^{it\lambda}\, d\lambda. \tag{4.2}$$

$$z(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-it\lambda}\, dt, \tag{4.3}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} k(r)\, e^{-ir\omega}\, dr, \tag{4.4}$$

где $z(\lambda)$ является белым шумом n-го порядка с интенсивностью $G(\omega)$. Назовем спектральной плотностью n-го порядка с. п. $x(\mathrm{t})$ функцию $l_1(\omega)$.

В том случае, если случайные величины $z(\lambda)$ некоррелированы n-го порядка (3.2) и $T<t<T$, представления (2.24—2.25) имеют место, если выполнено уравнение (2.23).

$$k_x\ (t_1 \cdots t_n) = \sum_j D_j e^{it_1\omega_j} \cdots e^{-it_n\omega_j}.$$

Если $K_x\,(r)$ возможно представить в виде ряда Фурье в интервале $nT < t < nT$, то последнее уравнение выполняется, поэтому

$$x(t) = \sum_j z(\lambda_j)\, e^{it\omega_j},$$

$$z(\lambda_j) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-it\omega_j}\, dt, \tag{4,5}$$

$$D_j = \frac{1}{2nT} \int_{-nT}^{nT} k_x\ (r)\, e^{-i\omega_j r}\, dr,\ (j = 1 \cdots).$$

Формулы (4.2), (4.5) определяют с. п. стационарные n-го порядка через белый шуп n-го порядка или через некоррелированные случайные величины n-го порядка.

В дальнейшем будет полезным следующее обобщение эргодической теоремы.

Теорема 8. Для центрированного с. п. $x(t)$,

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x^n(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{n} 0,$$

тогда и только тогда, когда

$$I_T = \frac{1}{T^n}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T} k_x(t_1\cdots t_n)\,dt_1\cdots dt_n \to 0. \tag{4.6}$$

Из теоремы вытекает, если $m_x(t) = \mathrm{const}$ и выполняется (4.6), то

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{n} m_x(t).$$

В том случае, если статистические связи быстро убывают с увеличением суммы расстояний между точками $t_1\cdots t_k$ и $t_{k+1}\cdots t_n$, для выполнения условий (4,5) достаточно предположить, что

$$|k_x(t_1+\cdots+t_k-t_{k+1}-\cdots-t_n)| = |k_x(r)| < \varepsilon \text{ при} \tag{4.7}$$

$$|r| > T_0;\quad 0 \le t_i \le T.$$

Действительно,

$$|I| \le \frac{D_m T(2T_0)^{n-1} + b^n}{T^n},$$

где

$$D_m = \max\cdot M\,|x(t)|^n.$$

Для стационарных процессов n-го порядка можно дать следующую оценку условия (6.4)

$$|I_T| \le \left|\frac{1}{T^n}\int_0^{nT}\left\{k_x(r)\,dr\int_0^{T-r} dt_n \underset{i=2\cdots n-1}{\int_0^{t_i}\cdots\int^{T}} dt_2\cdots dt_{n-1}\right.\right. +$$

$$+\int_{-nT}^{0} k_x(r)\,dr\int_{-r}^{T} dt_n \underset{i=2\cdots n-1}{\int_0^{t_i}\cdots\int^{T}} dt_2\cdots dt_{n-1} \le$$

$$\le \left|\frac{1}{T}\int_{-nT}^{nT} k(r)\left(1-\frac{|r|}{T}\right)dr\right|,$$

$$|I_T| \le \left|\frac{2}{T}\int_0^{nT}\left(1-\frac{|r|}{T}\right)|Re\,k_x(r)|\,dr.\right. \tag{4.8}$$

Теорема 8 дает практический способ построения ц. м. ф. n-го порядка для стационарного n-го порядка с. п. $x(t)$. Для того, чтобы

$$\frac{1}{T}\int_{T} z(t) \xrightarrow[T \to \infty]{n} k_x(r_0),$$

(где $z(t) = x(t+t_1) \cdots x(t+t_n)$; $r_0 = t_1 + \cdots + t_n$), необходимо и достаточно выполнения условия (4.6) для ц. м. ф. n-го порядка с. п. $z(t)$. Условия (4.7—4.8) являются только достаточными, условие (4,8) можно применять, если с. п. $z(t)$ — стационарный n-го порядка.

Выясним физический смысл спектральной плотности n-го порядка $C(\omega)$ (4.4) с. п. $x(t)$ эргодического по отношению к ц. м. ф. n-го порядка.

Из соотношения

$$k_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega = \overset{n}{\lim} \frac{1}{T}\int_{T} x^n(t)\, dt,$$

вытекает, что $G(\omega)d\omega$ можно физически интерпретировать как среднюю мощность более высокого порядка (именно n-го) гармоники частоты ω.

Заметим, что формула (3.4) упрощается в том случае, если на вход линейной стационарной системы действует стационарный процесс n-го порядка, тогда

$$k_y(r) = \int_{\Delta} G(\omega)\, |\Phi(i\omega)|^n e^{\omega r i}\, d\omega,$$

где $\Phi(i\omega)$ — частотная характеристика системы. Т. е. спектральная функция n-го порядка на выходе линейной системы равна

$$G_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^n\, G(\omega).$$

Предположим, что спектральную плотность n-го порядка с. п. $x(t)$ можно представить в виде

$$C_x(\omega) = \frac{|H(i\omega)|^n}{|F(i\omega)|^n};\ n = 2k,$$

где $H(\lambda)$ и $F(\lambda)$ полиномы с действительными коэффициентами, все нули и полюсы которых расположены в левой полуплоскости.

В этом случае можно рассматривать с. п. $x(t)$ как результат преобразования белого шума n-го порядка с единичной спектральной плотностью линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$F(D)\, x(t) = H(D)\, z(t).$$

В качестве примера рассмотрим с. п.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt,$$

где $x(t)$ с. п. — некоррелированный n-го порядка. Тогда

$$k_2(t_1 \cdots t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} G(\lambda_1)\,\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots \delta(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_i} G(\lambda_i) f\, d(\lambda_i) = f(t_i), \quad \text{если } t_i = t_j; \quad (j = 1 \cdots n).$$

Назовем $z(t)$ с. п. с независимыми прекращениями n-го порядка. С. п. $x(t)$ связаны с $z(t)$ следующим образом

$$x(t) = \frac{d}{dt}\, z(t).$$

Их моментные функции

$$k_x(t_1 \cdots t_n) = \frac{d_n}{dt_1 \cdots dt_n} \{f(t_i) \text{ если } (t_i) = t_j,\ j = 1 \cdots n\}.$$

В заключение можно отметить, что результаты данной работы могут быть распространены на векторные случайные процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Изд. 2-е. Физматгиз, 1950.

2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Изд. 2-е, ГИТЛ, 1954.

3. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. ИЛ, 1948.

4. И. И. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Изд. 2-е, Физматгиз, 1959.

5. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. ИЛ, 1956.

6. В. С. Пугачев. Общая теория корреляции случайных функций. Известия Академии наук СССР сер. матем. Г 17, № 5, 1953.

7. А. И. Коронкевич. Динамические системы под действием случайных сил. Дисс. Льв. Гос. ун. 1957.